

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

**Autor:** Berger, M.

**Kapitel:** 2. Exemples de variétés riemanniennes.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\sum_{i,j} g_{ij} du_i du_j \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

où les  $g_{ij}$  sont des fonctions de  $u_1, \dots, u_n$ . Si, pour tous les systèmes de coordonnées locales, ces coefficients sont des fonctions  $C^\infty$ , on dit que la forme est  $C^\infty$ . Une *structure riemannienne* (s.r.) sur  $M$  n'est pas autre chose qu'une forme différentielle quadratique  $g$  sur  $M$ , *définie positive*, et  $C_\infty$ . La forme bilinéaire symétrique associée permet de définir le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  tangents au même point  $m$  de  $M$  et induit une structure euclidienne dans  $T_m M$ . On notera ce produit scalaire  $g(x, y)$  et l'on écrira

$$|x| = (g(x, x))^{1/2}.$$

Par *variété riemannienne* (v.r.) on entend un couple  $(M, g)$  formé d'une variété  $M$  et d'une s.r. sur  $M$ . Une isométrie entre deux v.r.  $(M, g), (M', g')$  est un difféomorphisme  $f: M \rightarrow M'$  tel que  $f^* g' = g$  (où  $(f^* g')(x, y) = g'(T(f)(x), T(f)(y))$ ). On dira que  $(M, g), (M', g')$  sont *isométriques* s'il existe entre elles une isométrie.

Pour le lecteur non spécialiste, nous avons donné, parfois simultanément, trois références: [13], [12], [1]. La référence [13] est donnée parce que son chapitre II fournit une initiation très rapide à la géométrie riemannienne; [12] est donnée car c'est un ouvrage de référence récent et très complet. Enfin [1] pourra être agréable comme contenant la plus grande partie des définitions, exemples et résultats de cet article, ceci en détail.

## 2. Exemples de variétés riemanniennes.

### (2.1): l'espace euclidien $(\mathbf{R}^n, g_0)$ .

Soit  $E$  un espace euclidien quelconque, dont  $(\cdot | \cdot)$  désigne le produit scalaire; on en déduit sur  $E$  une s.r. canonique  $g_0$ : en effet l'espace tangent  $T_e E$  à  $E$  en  $e$  s'identifie canoniquement par une application  $\tau_e$  à  $E$  lui-même. On définira donc  $g_0$  par  $g_0(x, y) = (\tau_e(x) | \tau_e(y))$  pour tous  $x, y \in T_e E$ . Pour  $\mathbf{R}^n$ , muni de son produit scalaire canonique, on obtient donc ainsi une v.r.  $(\mathbf{R}^n, g_0)$ .

### (2.2):

Soit  $f: M \rightarrow N$  une application différentiable et  $h$  une s.r. sur  $N$ . Si l'application tangente à  $f$ ,  $T(f): TM \rightarrow TN$  est telle que, quel que soit  $m$ ,  $T_m(f)$  est *injective*, alors  $g = f^* h$  est une s.r. sur  $M$ . En effet  $f^* h$  est

toujours symétrique bilinéaire et elle est définie positive:  $\forall x \neq 0 : g(x, x) = (f^* h)(x, x) = h(T(f)(x), T(f)(x)) > 0$  puisque  $T(f)(x) \neq 0$  car  $T(f)$  injective. Deux cas particuliers de cette situation:

(2.3):

Soit  $(N, h)$  une v.r. et  $M \subset N$  une sous-variété de  $N$ . Si  $i : M \rightarrow N$  est l'injection canonique,  $i^*h = g$  est donc une s.r. sur  $M$ , qu'on notera indifféremment  $(M, h)$  ou  $(M, h|_M)$ . Exemples:

(2.3.1): soit  $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |x|=1\}$  la sphère de dimension  $n$ ; de (2.1) et (2.3) on déduit une s.r. canonique  $g_0$  sur  $S^n$ :  $(S^n, g_0)$ .

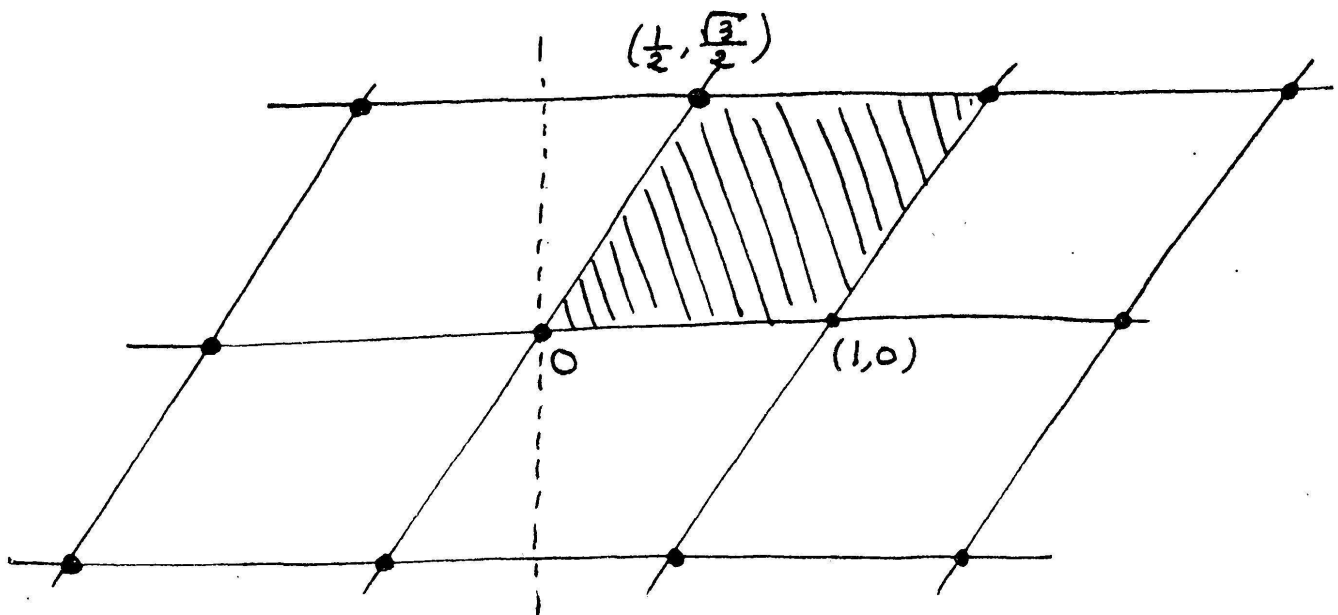
(2.3.2): le cas où  $S$  est une sous-variété de dimension deux de  $\mathbf{R}^3$  (surface), pour  $(\mathbf{R}^3, g_0)$ , conduit au premier exemple historique de v.r.;  $g_0|_S$  n'est autre que la « première forme fondamentale » de  $S$ .

(2.4):

Soit  $M \xrightarrow{p} N$  un revêtement,  $h$  une s.r. sur  $N$ . On a donc sur  $M$  la s.r.  $g = p^*h$ ; on dit alors que  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  est un *revêtement riemannien*. Du point de vue constructif, c'est plutôt la situation inverse que l'on rencontre: soit  $(M, g)$  une v.r. et  $G$  un groupe d'isométries discret sans point fixe de  $(M, g)$  et tel que l'application quotient  $M \xrightarrow{p} M/G = N$  soit un revêtement. Alors il existe sur  $N$  une s.r. unique  $h = g/G$  telle que  $(M, g) \xrightarrow{p} (N, h)$  soit un revêtement riemannien. Exemples:

(2.4.1):  $G$  est le groupe à deux éléments d'isométries de  $(S^n, g_0)$  formé par l'identité et l'antipodie. La variété quotient n'est autre que  $S^n/G = P^n(\mathbf{R})$ , l'espace projectif réel de dimension  $n$ ; le revêtement est évidemment à deux feuillets. D'où sur  $P^n(\mathbf{R})$  une s.r. canonique, c'est  $(P^n(\mathbf{R}), g_0)$  (appelé parfois espace elliptique).

(2.4.2):  $G$  est un réseau de  $\mathbf{R}^n$  (sous-groupe discret de rang maximum, donc isomorphe à  $\mathbf{Z}^n$ ). La variété quotient  $\mathbf{R}^n/G$  est le tore  $(S^1)^n$  de dimension  $n$ . On obtient ainsi des v.r.  $(\mathbf{R}^n/G, g_0/G)$  appelées *tores plats*; ainsi nommées parce qu'elles sont toujours localement isométriques à  $(\mathbf{R}^n, g_0)$ . Pour  $n = 2$ , le tore plat  $(\mathbf{R}^2/G, g_0/G)$  est dit *équilatéral* si  $G$  est déduit, par une isométrie de  $\mathbf{R}^2$ , du réseau  $G_0$  engendré par les deux vecteurs  $(1, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ :



(2.5): *submersions riemanniennes.*

Soient  $M, N$  deux variétés et  $M \xrightarrow{P} N$  une *submersion*, i.e.  $\forall m \in M : T_m(p)$  est de rang égal à  $\dim N$ . On peut alors définir en  $m \in M$  le sous-espace tangent *vertical*  $V_m$  de  $T_m(M)$ , à savoir le noyau  $V_m = T_m(p)^{-1}(0)$ . Si de plus  $g$  est une s.r. sur  $M$ , le sous-espace euclidien  $T_m(M)$  admet une décomposition orthogonale  $T_m(M) = V_m \oplus H_m$ ; le sous-espace  $H_m$  est dit *horizontal*. Noter que la restriction de  $T_m(p)$  à  $H_m$  est un isomorphisme d'espace vectoriels  $H_m \rightarrow T_{p(m)}(N)$ . Soient enfin  $(M, g), (N, h)$  deux v.r. On dit que  $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$  est une *submersion riemannienne* si  $p$  est une submersion et si  $\forall m \in M : T_m(p) : H_m \rightarrow T_{p(m)}(N)$  est une isométrie d'espaces euclidiens. Les revêtements riemanniens (2.4) en sont un exemple. Plus généralement on est sûr, étant donnés  $(M, g)$  et une submersion  $M \xrightarrow{P} N$ , de pouvoir construire une s.r.  $h$  sur  $N$  telle que  $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$  soit une submersion riemannienne, lorsque  $N = M/G$  où  $G$  est un groupe d'isométries de  $(M, g)$ ; car alors en effet les applications tangentes aux opérations de  $G$  sur une fibre  $p^{-1}(n), n \in N$ , permutant transitivement et isométriquement les  $T_m M$ , donc les  $H_m (m \in p^{-1}(n))$ , on pourra définir  $h_n$  par la condition «  $\forall m \in p^{-1}(n) : T_m(p) : H_m \rightarrow T_n N$  est une isométrie d'espaces euclidiens ». En voici deux cas particuliers, fondamentaux pour la suite:

(2.5.1): *espace projectif complexe  $(P^n(\mathbb{C}), g_0)$ .*

Soit  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{P} P^n(\mathbb{C})$  l'espace projectif complexe de dimension (complexe)  $n$ , défini comme quotient de  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  par la relation d'équivalence «  $xRy$  » si  $\exists z \in \mathbb{C} : y = zx$ . On munit  $\mathbb{C}^{n+1}$  de sa structure hermitienne canonique  $|z|^2 = |(z_0, \dots, z_n)|^2 = \sum_i z_i \bar{z}_i$ . On obtient encore  $P^n(\mathbb{C})$

en restreignant  $p$  à  $S^{2n+1} = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} : |z|^2 = 1\} : S^{2n+1} \xrightarrow{P} P^n(\mathbf{C})$  (c'est la fibration de Hopf). En outre  $P^n(\mathbf{C})$  apparaît comme le quotient  $S^{2n+1}/U$  de  $S^{2n+1}$  par le groupe  $U = \{z \cdot id_{\mathbf{C}^{n+1}}, |z|=1\}$  des homothéties de rapport de module égal à 1. Comme  $U(1) \subset O(2n+2)$ ,  $U$  consiste en isométries de  $(S^{2n+1}, g_0)$  d'où: *il existe sur  $P^n(\mathbf{C})$  une s.r. canonique  $g_0$ , telle que  $(S^{2n+1}, g_0) \xrightarrow{P} (P^n(\mathbf{C}), g_0)$  soit une submersion riemannienne.*

**(2.5.2):** *espace projectif quaternionien  $(P^n(\mathbf{H}), g_0)$ .*

On procède exactement de même, en remplaçant le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes par le corps  $\mathbf{H}$  des quaternions,  $U$  par  $Sp(1) = \{z \cdot id_{\mathbf{H}^{n+1}}, |z|=1, z \in \mathbf{H}\}$ , le groupe de Lie compact (homéomorphe à  $S^3$ ) des quaternions de module égal à 1. L'espace  $\mathbf{H}^{n+1}$  est muni de sa structure hermitienne canonique  $\sum_i z_i \bar{z}_i$ . On obtient sur  $P^n(\mathbf{H}) = S^{4n+3}/Sp(1)$  une s.r. canonique  $g_0$  telle que  $(S^{4n+3}, g_0) \xrightarrow{P} (P^n(\mathbf{H}), g_0)$  soit une submersion riemannienne.

**(2.6):** *espaces homogènes.*

Si l'on sait qu'il existe aussi un plan projectif des octaves de Cayley  $P^2(\mathbf{Ca})$  (mais pas de  $P^n(\mathbf{Ca})$  pour les  $n \geq 3$ ), on désirerait construire de même une s.r. canonique sur ce  $P^2(\mathbf{Ca})$ . Cela est impossible car il n'existe pas d'application convenable  $S^{23} \rightarrow P^2(\mathbf{Ca})$ ; il faut employer un autre procédé de construction, celui des espaces homogènes.

**(2.6.1):** *soit  $G$  un groupe de Lie et  $H$  un sous-groupe compact de  $G$ . Alors il existe sur  $M = G/H$  des s.r.  $G$ -invariantes, c'est-à-dire telles que toutes les opérations de  $G$  soient des isométries.*

C'est une affaire sans malice; on veut définir  $g_m$ ,  $m \in M$ . Soit  $G \xrightarrow{P} G/H = M$  et  $e = p(H)$ . On pense à définir  $g_m$  à partir d'une  $g_e$  fixe sur  $T_e M$  et des applications tangentes  $T(\gamma)$  des actions  $\gamma$  de  $G$  sur  $M$ , qui devront être des isométries d'espaces euclidiens. Ce sera possible si c'est cohérent, c'est-à-dire si  $\forall \gamma \in H : T_e(\gamma)$  est une isométrie de  $T_e M$ . C'est possible puisque  $H$  est compact: prendre  $g'_e$  structure euclidienne quelconque sur  $T_e M$  et faire la moyenne  $g_e$ , pour la mesure de Haar de  $H$ , des  $\gamma^* g'_e$ . Cette moyenne est bien  $T_e(\gamma)$ -invariante pour tout  $\gamma \in H$ ; ensuite on transporte  $g_e$  en  $m$  quelconque de  $M$  par une  $T_e(\gamma)$  où  $\gamma$  est tel que  $\gamma(e) = m$ .

**(2.6.2):** *en outre, si  $H$ , par les  $T_e(\cdot)$ , agit irréductiblement sur  $T_e M$ , alors  $M$  possède, à un scalaire positif près, une seule s.r.  $G$ -invariante.*

Ceci provient simplement de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut pas laisser invariantes deux formes quadratiques définies positives non proportionnelles; pour le voir, réduire l'une de ces formes par rapport à l'autre.

Par exemple (2.6.2) nous tranquillise, lorsque nous pensions à écrire les sphères, les projectifs comme espaces homogènes:  $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ ,  $P^n(\mathbf{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$ ,  $P^n(\mathbf{H}) = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)$ . Comme les groupes d'isotropie  $H$  agissent dans tous ces cas de façon irréductible, on n'obtient pas, par cette méthode, d'autres s.r. que celles de (2.3.1), (2.5.1), 2.5.2.) (à un scalaire près).

(2.7): *le plan projectif des octaves de Cayley* ( $P^2(\mathbf{Ca})$ ,  $g_0$ ).

L'espace  $P^2(\mathbf{Ca})$ , peut être défini comme l'espace homogène  $F_4/Spin(9)$  (voir [8]);  $Spin(9)$  agit de façon irréductible d'où, sur  $P^2(\mathbf{Ca})$  une s.r. canonique (on prendra celle normée en sorte que toutes les géodésiques soient de longueur  $\pi$ , voir (9.8)): ( $P^2(\mathbf{Ca})$ ,  $g_0$ ).

Nous poserons, pour tout  $n$ :

(2.8):  $P_0^n = S^n$ ,  $P_1^n = P^n(\mathbf{R})$ ,  $P_2^n = P^n(\mathbf{C})$ ,  $P_4^n = P^n(\mathbf{H})$ ,  $P_8^n = P^2(\mathbf{Ca})$ ;

Ainsi que  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{Ca}$  et  $i = \dim_{\mathbf{R}} K$ . Noter que  $\dim_{\mathbf{R}} P_1^n = i \cdot n$ . On aura donc les submersions riemanniennes:

(2.9):  $(S^{in+i-1}, g_0) \xrightarrow{P} (P_i^n, g_0)$ ,  $i = 1, 2, 4$ .

On rappelle les difféomorphismes entre  $P_i^1$  et  $S^i$  ( $i=1, 2, 4, 8$ ). En fait on a même des isométries entre

(2.10):  $(P_i^1, g_0)$  et  $(S^i, \frac{1}{4}g_0)$ ,  $i = 1, 2, 4, 8$ .

Enfin, en tant qu'espaces homogènes, les  $P_i^n$  se caractérisent comme étant exactement l'ensemble des espaces symétriques de rang égal à 1: [11], p. 354 et ii. Ces  $(P_i^n, g_0)$  vont servir de modèles à une grande partie de ce qui suit.

## VOLUMES, SURFACES, LONGUEUR

### 3. Définitions.

Le fait simple et fondamental est:

(3.1): *une v.r.  $(M, g)$  admet une mesure canonique,  $v_g$ .*

Heuristiquement, ceci vient de ce qu'un espace euclidien admet une mesure canonique (la mesure de Lebesgue pour  $\mathbf{R}^n$ ), et comme  $(M, g)$  est