Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

Autor: Berger, M.

Kapitel: 1. Définition des variétés riemanniennes.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43854

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE
OU
DEUX VARIATIONS SUR
LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

par M. Berger

Cet article reproduit, avec quelques développements, une conférence donnée à la réunion du groupe des mathématiciens rhodaniens, le 27 avril 1969 à Lausanne. C'est plutôt un article d'exposition, il n'apporte pas de résultats nouveaux. Après avoir défini ce qu'est une variété riemannienne (n° 1), on en donne des exemples (n° 2); parmi ceux-ci les projectifs réels, complexes, quaternioniens et le plan projectif des octaves de Cayley jouent un rôle à part. Avec les sphères, ils forment exactement la classe des espaces symétriques simplement connexes compacts de rang un. Ils servent de modèles pour les problèmes soulevés dans les deux parties (volumes-surfaces-longueurs, géodésiques) de l'article. On donne ensuite les définitions de deux invariants riemanniens géométriques très simples: les volumes (n° 3), les géodésiques (n° 8). La contemplation des projectifs donne alors lieu à des résultats (voir (4.3) et (12.2)) mais surtout à des problèmes ouverts, problèmes qui nous ont semblé intéressants.

1. *Définition des variétés riemanniennes.*

Rappelons quelques définitions. Une *variété à* n *dimensions* M est un espace topologique séparé qui peut être recouvert par des ensembles ouverts homéomorphes à des ouverts de $\mathbf{R}^n$. Un homéomorphisme d'un ouvert U de M sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est appelé une *carte de domaine* U; il associe à chaque point de U un système de n nombres réels, qu'on appelle des *coordonnées locales*. Une *structure* C^∞ sur M consiste en la donnée d'une classe privilégiée de cartes ou systèmes de coordonnées locales, dont les domaines recouvrent toujours M, jouissant de la propriété suivante: si les domaines U et U' de deux systèmes de cette classe empiètent, les coordonnées d'un point de $U \cap U'$ dans l'un des systèmes sont toujours des fonctions C^∞ (c'est-à-dire indéfiniment différentiables de ses coordonnées dans l'autre système. Une *variété* C^∞ (ou variété différentiable de classe C^∞) est une variété munie d'une structure C^∞. Toutes les variétés considérées ici seront C^∞ et les coordonnées locales utilisées seront toujours de la classe privilégiée.

Si M et M' sont deux variétés, une application continue f de M dans M' est dite C^∞, si les coordonnées locales dans M' de l'image $f(m)$ d'un point m de M sont des fonctions C^∞ des coordonnées locales de m dans M. Si f est bijective et si son inverse f^{-1} est aussi C^∞, on dit que f est un *difféomorphisme.*

Un *vecteur tangent à M au point m* est défini, relativement à un système de coordonnées locales $u_1, ..., u_n$ dans un voisinage de m, par un système de valeurs des différentielles $du_1, ..., du_n$. Relativement à un autre système de coordonnées locales $v_1, ..., v_n$ dans un voisinage du même point m, le même vecteur est défini par les valeurs correspondantes des différentielles $dv_1, ..., dv_n$, qui sont bien déterminées puisque les v_i sont fonctions C^∞ des u_j. Le fait que dv_i est linéaire en les du_j entraîne que l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M en m est muni d'une structure d'espace vectoriel et forme ainsi un espace vectoriel de dimension n; il est appelé *l'espace tangent à M en m* et noté T_mM.

L'ensemble $TM = \bigcup_{m \in M} T_mM$, réunion de tous les T_mM, est canoniquement muni d'une structure topologique et d'une structure C^∞, telles que, si $u_1, ..., u_n$ sont des coordonnées locales dans l'ouvert U de M, $TU = \bigcup_{m \in U} T_mM$ est un ouvert de TM homéomorphe à $U \times \mathbf{R}^n$ et $u_1, ..., u_n, du_1, ..., du_n$ sont des coordonnées locales dans TU. La variété TM, appelée *l'espace tangent à M*, est en plus munie d'une structure d'espace fibré vectoriel, les fibres de TM étant les T_mM.

A toute application C^∞ de la variété M, de dimension n, dans une autre variété M', de dimension p, $f: M \to M'$, est canoniquement associée une application de TM dans TM', appelée *l'application tangente à f* et notée $T(f)$. Elle est définie de la manière suivante: si x est un vecteur tangent à M en m, défini relativement à des coordonnées locales $u_1, ..., u_n$ par un système de valeurs de $du_1, ..., du_n$, son image $T(f)(x)$ est le vecteur tangent à M' en $m' = f(m)$ défini, relativement à des coordonnées locales $v_1, ..., v_p$ dans un voisinage de m', par les valeurs correspondantes de $dv_1, ..., dv_p$, valeurs bien déterminées puisque les v_i sont fonctions C^∞ des u_j. *Cette application* $\mathrm{T(f)}$ *est* C^∞, de plus, *sa restriction à* $\mathrm{T}_m\mathrm{M}$, qu'on notera $\mathrm{T}_m(\mathrm{f})$, *est une application linéaire de* $\mathrm{T}_m\mathrm{M}$ *dans* $\mathrm{T}_{m'}\mathrm{M}'$.

Une forme différentielle quadratique sur M est représentée, dans le domaine d'un système de coordonnées locales $u_1, ..., u_n$, par une expression telle que

$$\sum_{i,j} g_{ij} du_i du_j \qquad (g_{ij}=g_{ji})$$

où les g_{ij} sont des fonctions de $u_1, \ldots, u_n$. Si, pour tous les systèmes de coordonnées locales, ces coefficients sont des fonctions C^∞, on dit que la forme est C^∞. Une *structure riemannienne (s.r.) sur M* n'est pas autre chose qu'une forme différentielle quadratique g sur M, *définie positive*, et C_∞. La forme bilinéaire symétrique associée permet de définir le produit scalaire de deux vecteurs x et y tangents au même point m de M et induit une structure euclidienne dans $T_m M$. On notera ce produit scalaire $g(x, y)$ et l'on écrira

$$|x| = (g(x, x))^{1/2}.$$

Par *variété riemannienne* (v.r.) on entend un couple (M, g) formé d'une variété M et d'une s.r. sur M. Une isométrie entre deux v.r. (M, g), (M', g') est un difféomorphisme $f : M \to M'$ tel que $f^* g' = g$ (où $(f^* g')(x, y) = g'(T(f)(x), T(f)(y))$). On dira que (M, g), (M', g') sont *isométriques* s'il existe entre elles une isométrie.

Pour le lecteur non spécialiste, nous avons donné, parfois simultanément, trois références: [13], [12], [1]. La référence [13] est donnée parce que son chapitre II fournit une initiation très rapide à la géométrie riemannienne; [12] est donnée car c'est un ouvrage de référence récent et très complet. Enfin [1] pourra être agréable comme contenant la plus grande partie des définitions, exemples et résultats de cet article, ceci en détail.

2. *Exemples de variétés riemanniennes.*

(2.1): *l'espace euclidien* $(\mathbf{R}^n, g_0)$.

Soit E un espace euclidien quelconque, dont $(.|.)$ désigne le produit scalaire; on en déduit sur E une s.r. canonique g_0: en effet l'espace tangent $T_e E$ à E en e s'identifie canoniquement par une application τ_e à E lui-même. On définira donc g_0 par $g_0(x, y) = (\tau_e(x) \mid \tau_e(y))$ pour tous $x, y \in T_e E$. Pour $\mathbf{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, on obtient donc ainsi une v.r. $(\mathbf{R}^n, g_0)$.

(2.2):

Soit $f : M \to N$ une application différentiable et h une s.r. sur N. Si l'application tangente à f, $T(f) : TM \to TN$ est telle que, quel que soit m, $T_m(f)$ est *injective*, alors $g = f^* h$ est une s.r. sur M. En effet $f^* h$ est