

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE OU DEUX VARIATIONS SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

**Autor:** Berger, M.

**Kapitel:** 1. Définition des variétés riemanniennes.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43854>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE  
OU  
DEUX VARIATIONS SUR  
LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS DE RANG UN

par M. BERGER

Cet article reproduit, avec quelques développements, une conférence donnée à la réunion du groupe des mathématiciens rhodaniens, le 27 avril 1969 à Lausanne. C'est plutôt un article d'exposition, il n'apporte pas de résultats nouveaux. Après avoir défini ce qu'est une variété riemannienne (n° 1), on en donne des exemples (n° 2); parmi ceux-ci les projectifs réels, complexes, quaternioniens et le plan projectif des octaves de Cayley jouent un rôle à part. Avec les sphères, ils forment exactement la classe des espaces symétriques simplement connexes compacts de rang un. Ils servent de modèles pour les problèmes soulevés dans les deux parties (volumes-surfaces-longueurs, géodésiques) de l'article. On donne ensuite les définitions de deux invariants riemanniens géométriques très simples: les volumes (n° 3), les géodésiques (n° 8). La contemplation des projectifs donne alors lieu à des résultats (voir (4.3) et (12.2)) mais surtout à des problèmes ouverts, problèmes qui nous ont semblé intéressants.

1. *Définition des variétés riemanniennes.*

Rappelons quelques définitions. Une *variété à  $n$  dimensions*  $M$  est un espace topologique séparé qui peut être recouvert par des ensembles ouverts homéomorphes à des ouverts de  $\mathbf{R}^n$ . Un homéomorphisme d'un ouvert  $U$  de  $M$  sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  est appelé une *carte de domaine*  $U$ ; il associe à chaque point de  $U$  un système de  $n$  nombres réels, qu'on appelle des *coordonnées locales*. Une *structure*  $C^\infty$  sur  $M$  consiste en la donnée d'une classe privilégiée de cartes ou systèmes de coordonnées locales, dont les domaines recouvrent toujours  $M$ , jouissant de la propriété suivante: si les domaines  $U$  et  $U'$  de deux systèmes de cette classe empiètent, les coordonnées d'un point de  $U \cap U'$  dans l'un des systèmes sont toujours des fonctions  $C^\infty$  (c'est-à-dire indéfiniment différentiables) de ses coordonnées dans l'autre système. Une *variété*  $C^\infty$  (ou variété différentiable de classe  $C^\infty$ ) est une variété munie d'une structure  $C^\infty$ . Toutes les variétés consi-

dérées ici seront  $C^\infty$  et les coordonnées locales utilisées seront toujours de la classe privilégiée.

Si  $M$  et  $M'$  sont deux variétés, une application continue  $f$  de  $M$  dans  $M'$  est dite  $C^\infty$ , si les coordonnées locales dans  $M'$  de l'image  $f(m)$  d'un point  $m$  de  $M$  sont des fonctions  $C^\infty$  des coordonnées locales de  $m$  dans  $M$ . Si  $f$  est bijective et si son inverse  $f^{-1}$  est aussi  $C^\infty$ , on dit que  $f$  est un *difféomorphisme*.

Un *vecteur tangent* à  $M$  au point  $m$  est défini, relativement à un système de coordonnées locales  $u_1, \dots, u_n$  dans un voisinage de  $m$ , par un système de valeurs des différentielles  $du_1, \dots, du_n$ . Relativement à un autre système de coordonnées locales  $v_1, \dots, v_n$  dans un voisinage du même point  $m$ , le même vecteur est défini par les valeurs correspondantes des différentielles  $dv_1, \dots, dv_n$ , qui sont bien déterminées puisque les  $v_i$  sont fonctions  $C^\infty$  des  $u_j$ . Le fait que  $dv_i$  est linéaire en les  $du_j$  entraîne que l'ensemble de tous les vecteurs tangents à  $M$  en  $m$  est muni d'une structure d'espace vectoriel et forme ainsi un espace vectoriel de dimension  $n$ ; il est appelé *l'espace tangent* à  $M$  en  $m$  et noté  $T_m M$ .

L'ensemble  $TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$ , réunion de tous les  $T_m M$ , est canoniquement muni d'une structure topologique et d'une structure  $C^\infty$ , telles que, si  $u_1, \dots, u_n$  sont des coordonnées locales dans l'ouvert  $U$  de  $M$ ,  $TU = \bigcup_{m \in U} T_m M$  est un ouvert de  $TM$  homéomorphe à  $U \times \mathbf{R}^n$  et  $u_1, \dots, u_n, du_1, \dots, du_n$  sont des coordonnées locales dans  $TU$ . La variété  $TM$ , appelée *l'espace tangent* à  $M$ , est en plus munie d'une structure d'espace fibré vectoriel, les fibres de  $TM$  étant les  $T_m M$ .

A toute application  $C^\infty$  de la variété  $M$ , de dimension  $n$ , dans une autre variété  $M'$ , de dimension  $p$ ,  $f: M \rightarrow M'$ , est canoniquement associée une application de  $TM$  dans  $TM'$ , appelée *l'application tangente* à  $f$  et notée  $T(f)$ . Elle est définie de la manière suivante: si  $x$  est un vecteur tangent à  $M$  en  $m$ , défini relativement à des coordonnées locales  $u_1, \dots, u_n$  par un système de valeurs de  $du_1, \dots, du_n$ , son image  $T(f)(x)$  est le vecteur tangent à  $M'$  en  $m' = f(m)$  défini, relativement à des coordonnées locales  $v_1, \dots, v_p$  dans un voisinage de  $m'$ , par les valeurs correspondantes de  $dv_1, \dots, dv_p$ , valeurs bien déterminées puisque les  $v_i$  sont fonctions  $C^\infty$  des  $u_j$ . Cette application  $T(f)$  est  $C^\infty$ , de plus, sa restriction à  $T_m M$ , qu'on notera  $T_m(f)$ , est une application linéaire de  $T_m M$  dans  $T_{m'} M'$ .

Une forme différentielle quadratique sur  $M$  est représentée, dans le domaine d'un système de coordonnées locales  $u_1, \dots, u_n$ , par une expression telle que

$$\sum_{i,j} g_{ij} du_i du_j \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

où les  $g_{ij}$  sont des fonctions de  $u_1, \dots, u_n$ . Si, pour tous les systèmes de coordonnées locales, ces coefficients sont des fonctions  $C^\infty$ , on dit que la forme est  $C^\infty$ . Une *structure riemannienne* (s.r.) sur  $M$  n'est pas autre chose qu'une forme différentielle quadratique  $g$  sur  $M$ , *définie positive*, et  $C_\infty$ . La forme bilinéaire symétrique associée permet de définir le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  tangents au même point  $m$  de  $M$  et induit une structure euclidienne dans  $T_m M$ . On notera ce produit scalaire  $g(x, y)$  et l'on écrira

$$|x| = (g(x, x))^{1/2}.$$

Par *variété riemannienne* (v.r.) on entend un couple  $(M, g)$  formé d'une variété  $M$  et d'une s.r. sur  $M$ . Une isométrie entre deux v.r.  $(M, g), (M', g')$  est un difféomorphisme  $f: M \rightarrow M'$  tel que  $f^* g' = g$  (où  $(f^* g')(x, y) = g'(T(f)(x), T(f)(y))$ ). On dira que  $(M, g), (M', g')$  sont *isométriques* s'il existe entre elles une isométrie.

Pour le lecteur non spécialiste, nous avons donné, parfois simultanément, trois références: [13], [12], [1]. La référence [13] est donnée parce que son chapitre II fournit une initiation très rapide à la géométrie riemannienne; [12] est donnée car c'est un ouvrage de référence récent et très complet. Enfin [1] pourra être agréable comme contenant la plus grande partie des définitions, exemples et résultats de cet article, ceci en détail.

## 2. Exemples de variétés riemanniennes.

### (2.1): l'espace euclidien $(\mathbf{R}^n, g_0)$ .

Soit  $E$  un espace euclidien quelconque, dont  $(\cdot | \cdot)$  désigne le produit scalaire; on en déduit sur  $E$  une s.r. canonique  $g_0$ : en effet l'espace tangent  $T_e E$  à  $E$  en  $e$  s'identifie canoniquement par une application  $\tau_e$  à  $E$  lui-même. On définira donc  $g_0$  par  $g_0(x, y) = (\tau_e(x) | \tau_e(y))$  pour tous  $x, y \in T_e E$ . Pour  $\mathbf{R}^n$ , muni de son produit scalaire canonique, on obtient donc ainsi une v.r.  $(\mathbf{R}^n, g_0)$ .

### (2.2):

Soit  $f: M \rightarrow N$  une application différentiable et  $h$  une s.r. sur  $N$ . Si l'application tangente à  $f$ ,  $T(f): TM \rightarrow TN$  est telle que, quel que soit  $m$ ,  $T_m(f)$  est *injective*, alors  $g = f^* h$  est une s.r. sur  $M$ . En effet  $f^* h$  est