

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARQUES SUR LA SIGNATURE D'UNE PERMUTATION  
**Autor:** Cartier, P.  
**Kapitel:** 4. Permutations et graphes.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43848>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

peu plus délicat, on montre que dans le passage de  $D$  à  $sD$ , il y a permutation des facteurs et  $N(s)$  changements de signe, d'où  $sD = (-1)^{N(s)}D$ .

C) Dans la méthode précédente, tant les variables  $x_1, \dots, x_n$  que les fonctions  $f$  jouent un rôle assez fictif. On peut en présenter une variante plus « économique » de la manière suivante. A chaque permutation  $s$  de rang  $n$ , on associe l'entier  $\Pi(s) = \prod_{i < j} (s(j) - s(i))$ . On remarque ensuite que,

la permutation  $s$  étant fixée, toute partie à deux éléments de l'ensemble  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  se représente de manière unique sous la forme  $\{s(i), s(j)\}$  avec  $i < j$ ; de plus,  $|k - l|$  ne dépend évidemment que de la partie  $\{k, l\}$ . Par suite  $|\Pi(s)| = \prod_{i < j} |s(i) - s(j)|$  est égal à  $\prod_{\{k, l\}} |k - l| = \prod_{k < l} (l - k) = D$ . De plus, dans le produit définissant  $\Pi(s)$ , les facteurs négatifs correspondent exactement aux inversions de la suite  $s(1), \dots, s(n)$ . On en conclut

$$(9) \quad \Pi(s) = \alpha(s) \cdot D.$$

On considère ensuite deux permutations  $s$  et  $t$ . Dans le produit

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{i < j} \frac{s(t(j)) - s(t(i))}{t(j) - t(i)},$$

chaque facteur est invariant par l'échange de  $i$  et  $j$ , et ne dépend donc que de la partie  $\{t(i), t(j)\}$ . On a donc

$$\frac{\Pi(st)}{\Pi(t)} = \prod_{\{k, l\}} \frac{s(l) - s(k)}{l - k} = \prod_{k < l} \frac{s(l) - s(k)}{l - k} = \frac{\Pi(s)}{D} = \alpha(s),$$

c'est-à-dire

$$(10) \quad \Pi(st) = \alpha(s) \Pi(t).$$

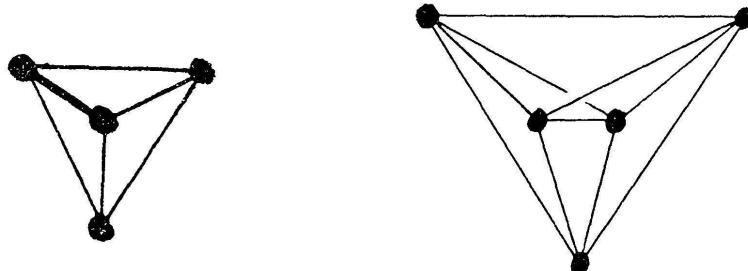
De (9) et (10), on déduit  $\alpha(st) \cdot D = \Pi(st) = \alpha(s) \cdot \Pi(t) = \alpha(s) \alpha(t) \cdot D$ , d'où  $\alpha(st) = \alpha(s) \alpha(t)$  puisque  $D$  est non nul. On prouve ensuite que le nombre d'inversions de  $\pi_i$  est égal à 1, d'où  $\alpha(\pi_i) = -1$ . Comme on l'a déjà remarqué, cela suffit à montrer qu'une permutation ne peut être à la fois paire et impaire.

#### 4. Permutations et graphes.

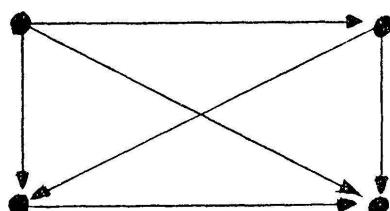
Comme J. L. Koszul me l'a fait plusieurs fois remarquer, l'inconvénient de la définition de la signature au moyen du nombre d'inversions est de dépendre étroitement de la relation d'ordre entre entiers; de même, les transpositions  $\pi_i$  de deux entiers consécutifs jouent un rôle privilégié dans les

démonstrations précédentes. Or, on a souvent besoin d'utiliser les permutations d'un ensemble fini  $X$  non numéroté à l'avance. Pour pouvoir définir le nombre d'inversions d'une permutation  $s$  de  $X$ , il faut choisir une énumération de  $X$ , ou ce qui revient au même une relation d'ordre total sur  $X$ . Le nombre d'inversions  $N(s)$  dépend de ce choix, mais comme on le constate *a posteriori*, la parité de  $N(s)$  a un caractère intrinsèque.

Pour répondre à cette objection, on peut présenter l'élaboration suivante de la méthode des inversions; l'idée en est qu'il suffit d'orienter les parties à deux éléments pour définir les inversions. Nous adoptons un mode d'exposition fondé sur la notion de *graphe*. Soit donc  $X$  un ensemble fini à  $n$  éléments, que nous représentons par des points d'un plan appelés *sommets*. Deux sommets distincts sont joints par un *arc*, comme dans les deux figures suivantes, qui correspondent aux cas  $n = 4$  et  $n = 5$ .



La figure ainsi obtenue s'appelle d'ordinaire le *graphe complet à  $n$  sommets*. Orienter un tel graphe consiste à choisir sur chaque arc un sens de parcours, représenté par une flèche dans l'exemple suivant:



Les arcs du graphe correspondent aux *parties* à deux éléments de  $X$  et orienter le graphe consiste à choisir dans chaque partie à deux éléments un premier et un deuxième élément. Il revient au même de dire qu'une *orientation* est un ensemble  $o$  de couples ordonnés  $(i, j)$  formés

d'éléments distincts de  $X$ , tel que l'on ait, soit  $(i, j) \in o$ , soit  $(j, i) \in o$  pour deux éléments distincts  $i$  et  $j$  de  $X$ . Une permutation  $s$  de  $X$  transforme l'orientation  $o$  en une nouvelle orientation  $so$  qui se compose des couples  $(s(i), s(j))$  avec  $(i, j)$  dans  $o$ . De manière intuitive,  $s$  définit un réarrangement des sommets du graphe qui entraîne un réarrangement des arcs, et l'on transporte avec chaque arc son orientation.

Soient  $o$  et  $o'$  deux orientations; soit  $m$  le nombre des arcs qui ont des orientations distinctes par rapport à  $o$  et  $o'$ , c'est-à-dire le nombre des

couples qui appartiennent à  $o'$ , mais non à  $o$ ; on pose  $d(o, o') = (-1)^m$ . Le formulaire suivant s'établit par des raisonnements élémentaires <sup>(2)</sup>

$$(11) \quad d(o, o) = 1$$

$$(12) \quad d(o, o') = d(o', o)$$

$$(13) \quad d(o, o') d(o', o'') = d(o, o'')$$

$$(14) \quad d(so, so') = d(o, o').$$

On peut alors prouver que  $d(o, so)$  est indépendant de l'orientation  $o$  choisie; en effet, si  $o$  et  $o'$  sont deux orientations, on a

$$\begin{aligned} d(o', so') &= d(o', o) d(o, so) d(so, so') && \text{d'après (13)} \\ &= d(o, o') d(o, so) d(o, o') && \text{d'après (12) et (14)} \\ &= d(o, so) && \text{car } d(o, o')^2 = 1. \end{aligned}$$

A toute permutation  $s$  de  $X$ , on fait correspondre alors le nombre  $\alpha(s)$  qui est égal à  $d(o, so)$  pour toute orientation  $o$ . Si  $s$  et  $t$  sont deux permutations, on a

$$\alpha(st) = d(o, sto) = d(o, to) d(to, s(to)) = \alpha(t) \alpha(s).$$

Pour calculer  $\alpha(s_{ab})$ , nous choisissons une orientation  $o$  convenable; on oriente l'arc  $ab$  de  $a$  vers  $b$ , chaque arc  $ax$  de  $a$  vers  $x$ , chaque arc  $bx$  de  $b$  vers  $x$  et les autres arcs de manière arbitraire. Le seul effet de la transposition  $s_{ab}$  est de changer l'orientation de l'arc  $ab$ , d'où  $\alpha(s_{ab}) = -1$ .

On peut donc définir la signature de  $s$  comme le nombre  $\alpha(s)$ . Supposons en particulier que  $X$  soit l'ensemble des entiers  $1, 2, \dots, n$  et prenons pour  $o$  l'ensemble des couples  $(i, j)$  avec  $i < j$ ; alors  $so$  se compose des couples de la forme  $(s(i), s(j))$  avec  $i < j$ ; les éléments de  $so$  qui n'appartiennent pas à  $o$  sont donc les couples  $(s(i), s(j))$  avec  $i < j$  et  $s(i) > s(j)$  et leur nombre est égal à  $N(s)$ . On retrouve donc la définition de la signature comme égale à  $(-1)^{N(s)}$ .

## 5. Autres méthodes.

On peut aussi utiliser les *cycles* d'une permutation pour définir sa signature ([6], chap. 8). Soit  $c(s)$  le nombre de cycles de la permutation  $s$  de rang  $n$ ; les définitions usuelles de la signature permettent de prouver qu'elle

---

<sup>2)</sup> On pourra consulter la note [4] pour des considérations plus générales.