**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 16 (1970)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARQUES SUR LA SIGNATURE D'UNE PERMUTATION
**Autor:** Cartier, P.
**Kapitel:** 1. Permutations paires et impaires.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-43848

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# REMARQUES SUR LA SIGNATURE D'UNE PERMUTATION

par P. CARTIER (Strasbourg)

## INTRODUCTION

La théorie des permutations est considérée par la plupart des débutants comme un sujet difficile. On y rencontre en effet des raisonnements d'un type assez différent de ceux auxquels ils ont été habitués dans leurs études antérieures. Il semble pourtant inévitable de l'enseigner dans un cours de première année d'Université, à cause des applications à la théorie des déterminants et à celle des polynômes symétriques.

Cette note est consacrée à un examen des diverses méthodes par lesquelles on peut introduire la signature d'une permutation. Nous avons nous-même expérimenté la plupart de ces méthodes, et discuté à plusieurs reprises de ces questions avec nos collègues J. L. Koszul et P. Gabriel. La comparaison des avantages et inconvénients des diverses méthodes s'appuie donc sur une expérience pédagogique réelle. Du point de vue mathématique, la seule nouveauté est la définition de la signature d'une permutation présentée au n° 4.

### 1. *Permutations paires et impaires.*

Rappelons les faits connus. Notons $n$ un entier strictement positif et $X$ l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots, n$. Une *permutation* (de rang $n$) est une bijection $s$ de $X$ sur $X$, c'est-à-dire une application de $X$ dans $X$ telle que tout élément de $X$ soit le transformé d'un élément et d'un seul. Si $s$ et $t$ sont deux permutations, leur produit $st$ est l'application qui à $i$ fait correspondre $s(t(i))$. La permutation identique $\varepsilon$ associe chaque élément de $X$ à lui-même. Enfin, si $s$ est une permutation, la permutation inverse $s^{-1}$ est telle que l'on ait $s^{-1}(i) = j$ si et seulement si $s(j) = i$. Avec cette définition du produit, de l'unité et de l'inverse, les permutations forment un groupe $S_n$.

Nous supposons connue la définition de la *transposition* $s_{ij}$ échangeant $i$ et $j$, et le fait que toute permutation est produit de transpositions; en fait, nous utiliserons plusieurs fois le fait que toute permutation est produit d'une suite finie de transpositions de la forme $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ avec $\pi_i = s_{i,i+1}$.

Appelons permutation *paire* toute permutation qui est produit d'un nombre pair de transpositions, et notons $S_n^+$ leur ensemble; définissons de manière analogue l'ensemble $S_n^-$ des permutations impaires. Ces définitions entraînent immédiatement les propriétés suivantes:

a) On a $S_n = S_n^+ \cup S_n^-$; autrement dit, toute permutation est paire ou impaire.

b) Il existe des permutations paires, par exemple $\varepsilon$, et des permutations impaires, par exemple les transpositions.

c) « Règle des signes »: le produit de deux permutations de même parité est pair, le produit de deux permutations de parité distincte est impair. De plus, toute permutation a même parité que son inverse.

*A priori*, rien n'exclut qu'une permutation puisse être à la fois paire et impaire. Examinons les deux possibilités:

A) Il n'existe aucune permutation à la fois paire et impaire. Alors les ensembles non vides $S_n^+$ et $S_n^-$ forment une *partition* de $S_n$. On peut définir la *signature* d'une permutation $s$ comme le nombre $sgn\ s$ égal à 1 si $s$ est paire et à $-1$ si $s$ est impaire. La règle des signes se traduit alors en formule:

$$sgn\ st = (sgn\ s) \cdot (sgn\ t)\,, \tag{1}$$

et par définition, on a

$$sgn\ s_{ij} = -1\,. \tag{2}$$

B) Il existe une permutation qui est à la fois paire et impaire. Si $a$ est une telle permutation, la règle des signes montre que $a^{-1}$ est impaire, donc que $\varepsilon = aa^{-1}$ est impaire. Une nouvelle application de la règle des signes montre que pour toute permutation $s$ paire (impaire), alors $s = \varepsilon s$ est impaire (paire). Autrement dit, toute permutation est paire et impaire, et l'on a $S_n^+ = S_n^- = S_n$.

De manière plus succincte, on peut dire ceci: le groupe $S_n$ est engendré par les transpositions, qui sont des éléments d'ordre 2; l'ensemble $S_n^+$ des permutations paires est le sous-groupe de $S_n$ engendré par les produits de deux transpositions, et $S_n^-$ est de la forme $S_n^+ t$; on a donc $S_n = S_n^+ \cup S_n^+ t$, et par suite, ou bien $S_n^+$ est d'indice 2 dans $S_n$ et $S_n^-$ est la classe modulo $S_n^+$ qui ne contient pas $\varepsilon$, ou bien $S_n^+$ est d'indice 1 dans $S_n$, auquel cas on a $S_n = S_n^+ = S_n^-$.