

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIE REDUKTIONSFORMELN VON POINCARÉ UND SCHLÄFLI
Autor: Weissbach, Bernulf
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43868>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

DIE REDUKTIONSFORMELN VON POINCARÉ UND SCHLÄFLI

von Bernulf WEISSBACH

Auf Sphären gerader Dimension kann der Inhalt eines Simplex durch Rückgriff auf niedrigere Dimensionen bestimmt werden. Eine entsprechende allgemeine Beziehung hat zuerst Schläfli [4] auf induktivem Wege über eine Differentialformel gewonnen. Ein zweiter Beweis Schläfli's [5] stützt sich auf eine Integraldarstellung des Inhalts sphärischer Sektoren, ist aber wenig durchsichtig. In einer Formel von H. Poincaré [3] kommt der gleiche Sachverhalt nur in unterschiedlicher Gestalt zum Ausdruck. Böhm [1] und Peschl [2] haben unabhängig voneinander auf die Gleichwertigkeit der Formeln von Poincaré und Schläfli hingewiesen.

Nachfolgend sollen Beweise der erwähnten Reduktionsformeln mitgeteilt werden, die besonders einfach erscheinen. Sie nutzen die von Erhard Schmidt verwendete Darstellung des Inhalts sphärischer Gebiete und kombinatorische Identitäten.

Rechtwinklige Koordinaten im n -dimensionalen euklidischen Raum \mathfrak{R}_n ($n > 1$) werden zur einspaltigen Matrix r zusammengefasst. Betrachtet werden Teilgebiete $S_{i_1 \dots i_k}^{(n)}, \{i_1 \dots i_k\} \subset \{1 \dots n\}, 1 \leq k \leq n$ der Sphäre $S^{(n)}$, $r \in S^{(n)} \sim r'r = 1$ unter denen ein Simplex $S_{1 \dots n}^{(n)}$ enthalten ist:

$$r \in S_{i_1 \dots i_k}^{(n)} \sim r'r = 1, C_{i_1} r > 0, \dots, C_{i_k} r > 0 \quad (1)$$

$$C_i = [c_{i1} \dots c_{in}], c_{ij}^2 \geq 0, \|c_{ij}\| \neq 0 \quad (1'')$$

Das Simplex $S_{1 \dots n}^{(n)}$ ist Teil aller übrigen Gebiete.

Für festes k werden die Inhalte $S_{i_1 \dots i_k}^{(n)}$ dieser Gebiete zusammengefasst zu:

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} S_{i_1 \dots i_k}^{(n)} = v_k \quad (1 \leq k \leq n) \quad (2)$$

(Zu summieren ist über alle k -reihigen geordneten Zeigerfolgen aus $\{1 \dots n\}$)

Diese Festsetzung möge noch durch

$$S^{(n)} = 2 \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]} = v_0 \quad (2'')$$

ergänzt werden, ($v_1 = n \cdot \frac{v_0}{2}$).

Ist G der Inhalt eines messbaren Gebietes G auf der Sphäre $\mathfrak{S}^{(n)}$, \bar{G} der Kegel der vom Ursprung ausgehenden und G treffenden Halbgeraden und $f(w)$ eine integrierbare Funktion—

$$0 < \left| \int_0^\infty r^{n-1} f(r^2) dr \right| < \infty$$

so kann G über

$$G \int_0^\infty r^{n-1} f(r^2) dr = \int_{\bar{G}} f(\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r}; \quad d\mathbf{r} = dx_1 \dots dx_n \quad (3)$$

dargestellt werden. Demzufolge gilt für das Simplex $\mathfrak{S}_{1\dots n}^{(n)}$ und die allgemeineren Gebiete $\mathfrak{S}_{i_1\dots i_k}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} S_{i_1\dots i_k}^{(n)} &= \int_{\substack{f(\mathbf{r}'\mathbf{r}) \\ C_{i_1}\mathbf{r} > 0, \dots, C_{i_k}\mathbf{r} > 0}} \bar{f}(\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &\left[\int_0^\infty r^{n-1} f(r^2) dr \right]^{-1} \cdot f(w) = \bar{f}(w) \end{aligned} \quad (4)$$

Spiegelung von $\mathfrak{S}_{i_1\dots i_k}^{(n)}$ am Ursprung führt auf die gleichwertige Darstellung

$$\begin{aligned} S_{i_1\dots i_k}^{(n)} &= \int_{\substack{f(\mathbf{r}'\mathbf{r}) \\ C_{i_1}\mathbf{r} < 0, \dots, C_{i_k}\mathbf{r} < 0}} \bar{f}(\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &\left[\int_0^\infty r^{n-1} f(r^2) dr \right]^{-1} \cdot f(w) = \bar{f}(w) \end{aligned} \quad (4*)$$

Soll in (4) bzw. (4*) die Integration nicht nur über den jeweiligen Kegel sondern über den ganzen Raum \mathfrak{R}_n erstreckt werden, so ist der Integrand derart abzuändern, dass er ausserhalb des Kegels verschwindet, während er im Innern erhalten bleibt. Das kann durch Einbau von Sprungfunktionen bewirkt werden. Mit

$$v(x) = -v(-x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -\frac{1}{2}; & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

führt (4) bzw. (4*) auf

$$S_{i_1 \dots i_k}^{(n)} = \int_{\mathfrak{R}_n} \bar{f}(\mathbf{r}'\mathbf{r}) \prod_{v=i_1 \dots i_k} \left[\frac{1}{2} \begin{smallmatrix} + \\ (-) \end{smallmatrix} v(C_v \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} \quad 1 \leq k \leq n \quad (6)$$

Hierzu tritt noch im Falle des leeren Produkts

$$S^{(n)} = \int_{\mathfrak{R}_n} \bar{f}(\mathbf{r}'\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (6^*)$$

Zum Wert des Integrals (6) trägt nur der gerade Anteil des Integranden bei. Darin kann der Ursprung der Reduktionsformeln gesehen werden, die jetzt leicht zu gewinnen sind.

Wird die für beliebige z_v gültige Identität

$$\prod_{v=1}^n \left[\frac{1}{2} - z_v \right] = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \prod_{v=i_1 \dots i_k} \left(\frac{1}{2} + z_v \right) \quad (7)$$

— für $k = 0$ ist 1 als Summand zu setzen — angewandt auf das Produkt in

$$v_n = S_{1 \dots n}^{(n)} = \int_{\mathfrak{R}_n} \bar{f}(\mathbf{r}'\mathbf{r}) \prod_{v=1}^n \left[\frac{1}{2} - v(C_v \mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}$$

so erhält man nach Austausch von Integration und Summation über (6,6*) und (2,2*) sofort:

$$v_n [1 + (-1)^{n+1}] = \sum_{k=0}^{n-1} v_k \quad (8)$$

Das ist im wesentlichen die von Poincaré angegebene Beziehung. Im allgemeinen wird sie nicht — wie hier — als Gleichung zwischen den Inhalten sphärischer Gebiete formuliert, sondern für die Größen $\frac{v_k}{v_0}$, $k = 0 \dots n$, angegeben. Für $n = 2m + 1$ kann nach (8) $S_{1 \dots 2m+1}^{(2m+1)}$ aus allen v_k , $0 \leq k \leq 2m$, bestimmt werden.

Benutzt man, für $n = 2m + 1$, zur Zerlegung des Produkts die weniger bekannte Identität

$$\begin{aligned} \prod_{v=1}^{2m+1} \left[\frac{1}{2} + z_v \right] &= \sum_{k=0}^m \frac{(2^{2k+2}-1)}{k+1} B_{2k+2} \sum_{i_1 < \dots < i_{2m-2k}} \prod_{v=i_1 \dots i_{2m-2k}} z_v \\ &+ \sum_{k=0}^m 2^{-2k} B_{2k}^* \sum_{i_1 < \dots < i_{2m+1-2k}} \prod_{v=i_1 \dots i_{2m+1-k}} z_v \end{aligned} \quad (9)$$

(B_{2k} die Bernoullischen $-B_{2k}^*$ die Eulerschen Zahlen; 1 für das leere Produkt), so ergibt sich auf dem gleichen Wege, da Anteile abgespaltet werden, die ohne Einfluss auf den Wert des Integrals sind:

$$v_{2m+1} = \sum_{k=0}^m \frac{(2^{2k+2}-1)}{k+1} B_{2k+2} v_{2m-2k} \quad (10)$$

Bei Schläffi [5, p. 38] findet man die entsprechende Gleichung für die Grössen $2^k \frac{v_k}{v_0}$ (Statt der Gebiete $\mathfrak{G}_{i_1 \dots i_k}^{(n)}$ werden dort die Sektoren $C_{i_1} r > 0, \dots, C_{i_k} r > 0; r' r \leq 1$ betrachtet). Wie Schläfli hervorhebt ist $S_{i_1 \dots i_k}^{(n)}, 1 < k < n$ dem Inhalt eines Simplex auf der Sphäre $\mathfrak{S}^{(k)}$ des $\mathfrak{R}^{(k)}$ proportional.

Recht leicht lässt sich auch diese Aussage aus (4) gewinnen — mit $f(w) = e^{-w}$ kann nach einer geeigneten orthogonalen Transformation über $n - k$ Veränderliche, die dann nur noch im Exponenten auftreten, integriert werden.

Sowohl nach Schläflis als auch nach Poincarés Formel ist es mithin möglich $S_{1 \dots 2m+1}^{(2m+1)}$ durch Rückgriff auf niedrigere Dimensionen zu ermitteln.

LITERATUR

- [1] BÖHM, J. Untersuchung des Simplexinhalts in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimensionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 202 (1959), S. 16-51.
- [2] PESCHL, P. Winkelrelationen am Simplex und die Eulersche Charakteristik. *Sitzungsberichte der math.-nat. Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* (1955). S. 319-345.
- [3] POINCARÉ, M. H. Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* (1) 140 (1905). S. 78-80.
- [4] SCHÄFLI, L. *Gesammelte math. Abhandlungen I (Theorie der vielfachen Kontinuität aus dem Jahre 1852)*. Basel (1950). S. 227 ff.
- [5] SCHÄFLI, L. *Gesammelte math. Abhandlungen 3* Basel (1956). S. 21-39.