Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FUNCTIONAL EQUATIONS CONNECTED WITH ROTATIONS AND THEIR GEOMETRIC APPLICATIONS

Autor: Schneider, Rolf

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43867

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Theorem 1.4, for $d = 3$ and special measures, may be found in the book of Blaschke [5] (p. 152, 154-155). The general case is due to A. D. Aleksandrov [1] (§8) (though in the form of a seemingly more special geometric theorem); compare also Petty [16] (p. 1545-1546). The case $d = 3$ (and φ specialized) of Theorem 1.5 is due to Funk [9]; another proof (of special cases in geometric formulation) has been given by Kubota [11]. The common generalization of both uniqueness theorems, which is given above, may be found in [18]. To this paper we refer also for references to the known geometric consequences of Theorems 1.4 and 1.5, as well as for some new applications thereof.

The question leading to Theorem 1.5 can be generalized in the following way: Let $D \subset \Omega_d$ be any domain, and let us say for the moment that D is *non-special* if and only if every measure φ on Ω_d for which $\varphi(D') = 0$ for each domain D' (properly) congruent to D, must vanish identically; otherwise D is called *special*. If D is a spherical cap of radius $\alpha \in (O, \pi)$, it has been shown that D is special if and only if α is contained in a certain set of values which is denumerable and dense in (O, π) (Ungar [21], more general in [18]). Ungar [21] has given an example of a non-circular special domain on Ω_3. Now Theorem 2.1 (if generalized to piecewise continuous functions) allows, at least theoretically, to decide whether a given domain $D \subset \Omega_d$ is non-special: For this to be the case it is necessary and sufficient that

$$\int_D Y_{ni}\, d\omega \neq 0$$

for each $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ and some $i \in \{1, \dots, N_{d,n}\}$. Thus the answer depends on the computation of denumerably many definite integrals.

Finally we mention that a special case of the 2-dimensional analogue of Theorem 2.1 was used by Görtler [10] in characterizing those pairs of plane convex domains whose mixed area is invariant under arbitrary (non-simultaneous) motions of the domains.

REFERENCES

[1] Aleksandrov, A. D., Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. II. (Russian, German summary.) *Mat. Sbornik*, N.S. 2 (1937), 1205-1238.

[2] Berwald, L., Integralgeometrie 25. Über die Körper konstanter Helligkeit. *Math. Z.*, 42 (1937), 737-738.

[3] Blaschke, W., Eine kennzeichnende Eigenschaft des Ellipsoids und eine Funktionalgleichung auf der Kugel. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig*, 68 (1916), 129-136.

[4] —— Über affine Geometrie. IX. Verschiedene Bemerkungen und Aufgaben. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig*, 69 (1917), 412-420.
[5] —— *Kreis und Kugel.* 2nd ed., W. de Gruyter, Berlin 1956.
[6] BONNESEN, T. and W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper.* Springer, Berlin 1934.
[7] CHAKERIAN, G. D., The affine image of a convex body of constant breadth. *Israel J. Math.*, 3 (1965), 19-22.
[8] FUNK, P., Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien. *Math. Ann.*, 74 (1913), 278-300.
[9] —— Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung. *Math. Ann.*, 77 (1916), 129-135.
[10] GÖRTLER, H., Zur Addition beweglicher ebener Eibereiche. *Math. Z.*, 42 (1937), 313-321.
[11] KUBOTA, T., Einige Probleme über konvex-geschlossene Kurven und Flächen. *Tôhoku Math. J.*, 17 (1920), 351-362.
[12] MATSUMURA, S., Eiflächenpaare gleicher Breiten und gleicher Umfänge. *Jap. J. Math.*, 7 (1930), 225-226.
[13] MEISSNER, E., Über die durch reguläre Polyeder nicht stützbaren Körper. *Vierteljahresschr. Naturf. Ges. Zürich*, 63 (1918), 544-551.
[14] MINKOWSKI, H., Über die Körper konstanter Breite. *Mat. Sbornik*, 25 (1904), 505-508 (Russian); Ges. Abh., Vol. II, 277-279.
[15] MÜLLER, C., *Spherical harmonics.* Lecture Notes in Math., 17. Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
[16] PETTY, C. M., Centroid surfaces. *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 1535-1547.
[17] SCHNEIDER, R., Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres. *J. Math. Anal. Appl.*, 26 (1969), 381-384.
[18] —— Über eine Integralgleichung in der Theorie der konvexen Körper. *Math. Nachr.* 44 (1970), 55-75.
[19] —— Gleitkörper in konvexen Polytopen. *J. reine angew. Math.* (to appear).
[20] —— On Steiner points of convex bodies *Israel J. Math.* (to appear).
[21] UNGAR, P., Freak theorem about functions on a sphere. *J. London Math. Soc.*, 29 (1954), 100-103.
[22] WEYL, H., Harmonics on homogeneous manifolds. *Ann. of Math.*, 35 (1934), 486-499.

(Reçu le 30 juillet 1970)

Technische Universität Berlin
Mathematisches Institut
D-1 Berlin

vide-leer-empty