Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE RELATIVE AUX THÉORÈMES DES S-UNITÉS ET DES S-CLASSES

Autor: Joly, Jean-René

Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (3)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43865

Reste à prouver (ii). L'inclusion $T^{-1}A \subset A_S$ est évidente, puisqu'on a déjà remarqué que t est une S-unité, donc que les $1/t^m \,(m \geq 0)$ sont des S-entiers. Inversement, soit $y \in A_S$, et considérons le produit $yt^m \,(m \geq 0)$. En tout $\mathfrak{q} \notin D$, on a, d'après (i),

$$v_q(yt^m) = v_q(y) \geq 0.$$

En $\mathfrak{p}_j \in D$, on a, toujours d'après (i),

$$v_j(yt^m) = v_j(y) + mv_j(t) \geq v_j(y) + m.$$

Choisissons pour m une valeur $\geq \sup\limits_j |v_j(y)|$ et posons $x = yt^m$. Pour toute valuation discrète normalisée v de K, on a alors $v(x) \geq 0$: donc $x \in A$, $y = x/t^m \in T^{-1}A$, et finalement $A_S \subset T^{-1}A$, ce qui achève de démontrer (ii), et la proposition.

3. Démonstration du théorème (3)

Nous noterons $z_1, z_2, \ldots, z_s$ les coordonnées dans l'espace $\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^a \times \mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{r+1} \times \mathbf{R}^d$.

La démonstration se décomposera en quatre parties:

(a) *L'homomorphisme* Λ *a pour noyau* W.

En effet, si $x \in U_S$, l'égalité $\Lambda(x) = 0$ implique d'abord

$$|x|_{a+1} = \ldots = |x|_s = 1,$$

ce qui signifie que x est non seulement une S-unité, mais une unité de A; $\Lambda(x) = 0$ implique d'autre part $|x|_1 = \ldots = |x|_a = 1$, ce qui montre que cette unité x appartient au noyau de L, donc à W (théorème (1)); inversement, il est clair que $x \in W$ implique $\Lambda(x) = 0$. D'où (a).

(b) $\Lambda(U_S)$ *est un sous-groupe discret de* $\mathbf{R}^s$.

Les valeurs absolues $|.|_{a+1}, \ldots, |.|_s$ provenant de valuations discrètes, il est clair qu'on peut trouver dans $\mathbf{R}^d$ un voisinage V' de l'origine tel que la condition

$$(\log|x|_{a+1}, \ldots, \log|x|_s) \in V'$$

implique $|x|_{a+1} = \ldots = |x|_s = 1$, ce qui signifie (si $x \in U_S$) que x est en fait une unité de A. Soit alors V un voisinage *borné* de 0 dans $\mathbf{R}^a$: la double condition

$$x \in U_S \text{ et } \Lambda(x) \in V \times V'$$

peut s'écrire

$$x \in U \text{ et } L(x) \in V,$$

et d'après le théorème (1), ceci n'est possible que pour un nombre fini de x. D'où (b).

(c) $\Lambda(U_S)$ *est contenu dans l'hyperplan* $z_1 + z_2 + \ldots + z_s = 0$.

Supposons en effet $x \in U_S$ et décomposons l'idéal xA en facteurs premiers (dans A):

$$xA = \prod_{1 \leq j \leq d} \mathfrak{p}_j^{\nu_j(x)}.$$

Egalons les normes absolues des deux membres:

$$|Nx| = \prod_{1 \leq j \leq d} (N\mathfrak{p}_j)^{\nu_j(x)}.$$

Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les plongements $K \to \mathbf{C}$ indexés de telle manière que $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ soient les plongements réels, et que, pour $1 \leq k \leq r_2$, σ_{r_1+k} et $\sigma_{r_1+r_2+k}$ soient complexes conjugués, la formule ci-dessus devient

$$\prod_{1 \leq i \leq r_1} |\sigma_i x| \,.\, \prod_{r_1+1 \leq i \leq a} |\sigma_i x|^2 \,.\, \prod_{1 \leq j \leq d} (N\mathfrak{p}_j)^{-\nu_j(x)} = 1,$$

soit, compte tenu de la définition des valeurs absolues normalisées:

$$\prod_{1 \leq i \leq s} |x|_i = 1.$$

(c) résulte de là, en prenant les logarithmes. Notons que nous venons en fait de redémontrer la formule du produit.

(d) $\Lambda(U_S)$ *contient un réseau de rang* $s-1$.

C'est en principe la partie difficile: en réalité, tout le travail a été fait dans le théorème (1). Soit en effet $u_1, u_2, \ldots, u_r$ (rappel: $r = a-1 = r_1+r_2-1$) un système fondamental d'unités de K (nous utilisons le théorème (1)) et considérons le sous-groupe G de U_S engendré par $u_1, \ldots, u_r, x_1, \ldots, x_d$. $\Lambda(G)$ est un sous-groupe de $\Lambda(U_S)$ (donc un réseau de $\mathbf{R}^s$), et il est engendré par $\Lambda(u_1), \ldots, \Lambda(u_r), \Lambda(x_1), \ldots, \Lambda(x_d)$. La matrice de ces $r+d = s-1$ vecteurs dans la base canonique de $\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^a \times \mathbf{R}^d$ s'écrit

$$\begin{array}{l} \mathbf{R}^a \\ \\ \\ \mathbf{R}^d \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|cccc} M & & X & & \\ \hline & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_d \end{array}\right)$$

M désignant la matrice de $L(u_1), \ldots, L(u_r)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^a$, et les λ_j désignant les quantités $\log |x_j|_j$. Par construction des x_j, on a $\lambda_1 \neq 0, \ldots \lambda_d \neq 0$; d'après le théorème (1), M est de rang $r = a - 1$: la matrice ci-dessus est donc de rang $r + d = s - 1$, et aussi le groupe $\Lambda(G)$, ce qui prouve (d).

(b), (c) et (d) montrent que $\Lambda(U_S)$ est un réseau de rang exactement $s - 1$, et le théorème (3) est démontré.

4. Démonstration du théorème 4

La partie (v) de la proposition 1 du §2 montre que l'application $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}A_S$ définit un homomorphisme surjectif φ du groupe des idéaux de A sur le groupe des idéaux de A_S; comme φ transforme évidemment tout idéal principal en un idéal principal, φ donne lieu par passage au quotient à un homomorphisme surjectif du groupe des classes d'idéaux de A sur le groupe des classes d'idéaux de A_S; comme le premier groupe est fini, d'ordre h (théorème (2)), le second est lui aussi fini, d'ordre h_S diviseur de h, d'où la première assertion du théorème (4).

Le même raisonnement prouve d'ailleurs plus généralement que si $S \subset S'$, alors $h_{S'}$ divise h_S: pour achever de démontrer le théorème (4), il suffit donc de prouver ceci: *il existe un ensemble S tel que $h_S = 1$.*

Or, soient $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_h$ des idéaux entiers de A représentant les h classes d'idéaux de A, et soit $D = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_d\}$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui divisent l'un au moins des $\mathfrak{a}_i$; enfin, soit S l'ensemble formé des places archimédiennes de K et des places discrètes appartenant à D; alors, $h_S = 1$: en effet, soit $\mathfrak{b}$ un idéal entier de A_S; il existe un idéal entier $\mathfrak{a}$ de A tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}A_S$ (prop. 1, (v)); d'autre part, il existe $y \in K^*$ et i tels que $\mathfrak{a} = y\mathfrak{a}_i$; enfin, $\mathfrak{a}_i$ se décompose en produit de facteurs premiers appartenant tous à D:

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}_1^{m_1} \mathfrak{p}_2^{m_2} \ldots \mathfrak{p}_d^{m_d}.$$

D'où immédiatement (prop. 1, (iv))

$$\mathfrak{b} = yA_S;$$

$\mathfrak{b}$, idéal entier quelconque de A_S, est principal, et $h_S = 1$. Le théorème (4) est entièrement démontré.

Notons qu'il suffit, dans la démonstration ci-dessus, de prendre pour D une famille finie d'idéaux premiers dont les classes forment un système générateur du groupe des classes de A. Dans la pratique, il est facile de