Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 16 (1970)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTE RELATIVE AUX THÉORÈMES DES S-UNITÉS ET DES S-CLASSES

Autor: Joly, Jean-René

Kapitel: 2. Etude de l'anneau des S-entiers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43865

2. Etude de l'anneau des S-entiers

Conservons les notations du §1. Puisque le groupe des classes de A est d'ordre fini (théorème (2)), il existe pour tout j tel que $1 \leq j \leq d$ un exposant $n_j \geq 1$ (l'ordre de la classe de $\mathfrak{p}_j$) tel que l'idéal $\mathfrak{p}_j^{n_j}$ soit principal, disons

$$\mathfrak{p}_j^{n_j} = x_j A \qquad (x_j \in A).$$

Il est clair que $v_j(x_j) = n_j$. En revanche, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_j$, on a $v_\mathfrak{q}(x_j) = 0$ ($v_\mathfrak{q}$ désignant la valuation discrète normalisée associée à $\mathfrak{q}$: si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$, $v_\mathfrak{q} = v_i$): dans le cas contraire, en effet, on aurait $x_j \in \mathfrak{q}$, donc $x_j A = \mathfrak{p}_j^{n_j} \subset \mathfrak{q}$, donc successivement $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{q}$ (contradiction!) puisque $\mathfrak{q}$ est premier et $\mathfrak{p}_j$ maximal.

Il résulte de là que les x_j sont des *S-unités*. Posons alors $t = x_1 x_2 \ldots x_d$ (c'est aussi une S-unité) et désignons par T la partie multiplicative $\{1, t, t^2, \ldots, t^m, \ldots\}$ de A.

Proposition 1.

(i) *Pour tout j tel que $1 \leqq j \leqq d$, on a $v_j(t) > 0$. Au contraire, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \notin D$ (on identifie pour simplifier les ensembles D et $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_d\}$), on a $v_\mathfrak{q}(t) = 0$.*

(ii) *L'anneau A_S des S-entiers de K est égal à l'anneau de fractions $T^{-1}A$.*

(iii) *A_S est un anneau de Dedekind.*

(iv) *L'application $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}A_S$ établit une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de A* n'appartenant pas à *D sur l'ensemble des idéaux premiers de A_S. Cette application « tue » les idéaux premiers appartenant à D: si $1 \leq j \leq d$, $\mathfrak{p}_j A_S = A_S$.*

(v) *L'application $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}A_S$ est une surjection de l'ensemble des idéaux entiers de A sur l'ensemble des idéaux entiers de A_S. Pour que $\mathfrak{a}A_S = A_S$, il faut et il suffit que tous les facteurs premiers de $\mathfrak{a}$ appartiennent à D.*

Démonstration:

(i) résulte de la définition de t. (iii) et (iv) sont des conséquences immédiates de (ii) et des propriétés des anneaux de fractions (voir [10], chap. 5, prop. 1 et 3). Enfin (v) résulte immédiatement de (iii) et (iv).

Reste à prouver (ii). L'inclusion $T^{-1}A \subset A_S$ est évidente, puisqu'on a déjà remarqué que t est une S-unité, donc que les $1/t^m\,(m \geq 0)$ sont des S-entiers. Inversement, soit $y \in A_S$, et considérons le produit $yt^m\,(m \geq 0)$. En tout $\mathfrak{q} \notin D$, on a, d'après (i),

$$v_q(yt^m) = v_q(y) \geq 0.$$

En $\mathfrak{p}_j \in D$, on a, toujours d'après (i),

$$v_j(yt^m) = v_j(y) + mv_j(t) \geq v_j(y) + m.$$

Choisissons pour m une valeur $\geq \sup\limits_j |\, v_j(y)\,|$ et posons $x = yt^m$. Pour toute valuation discrète normalisée v de K, on a alors $v(x) \geq 0$: donc $x \in A$, $y = x/t^m \in T^{-1}A$, et finalement $A_S \subset T^{-1}A$, ce qui achève de démontrer (ii), et la proposition.

3. Démonstration du théorème (3)

Nous noterons $z_1, z_2, \ldots, z_s$ les coordonnées dans l'espace $\mathbf{R}^s = \mathbf{R}^a \times \mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{r+1} \times \mathbf{R}^d$.

La démonstration se décomposera en quatre parties:

(a) *L'homomorphisme* Λ *a pour noyau* W.

En effet, si $x \in U_S$, l'égalité $\Lambda(x) = 0$ implique d'abord

$$|\, x\,|_{a+1} = \ldots = |\, x\,|_s = 1,$$

ce qui signifie que x est non seulement une S-unité, mais une unité de A; $\Lambda(x) = 0$ implique d'autre part $|\, x\,|_1 = \ldots = |\, x\,|_a = 1$, ce qui montre que cette unité x appartient au noyau de L, donc à W (théorème (1)); inversement, il est clair que $x \in W$ implique $\Lambda(x) = 0$. D'où (a).

(b) $\Lambda(U_S)$ *est un sous-groupe discret de* $\mathbf{R}^s$.

Les valeurs absolues $|\cdot|_{a+1}, \ldots, |\cdot|_s$ provenant de valuations discrètes, il est clair qu'on peut trouver dans $\mathbf{R}^d$ un voisinage V' de l'origine tel que la condition

$$(\log |\, x\,|_{a+1}, \ldots, \log |\, x\,|_s) \in V'$$

implique $|\, x\,|_{a+1} = \ldots = |\, x\,|_s = 1$, ce qui signifie (si $x \in U_S$) que x est en fait une unité de A. Soit alors V un voisinage *borné* de 0 dans $\mathbf{R}^a$: la double condition

$$x \in U_S \text{ et } \Lambda(x) \in V \times V'$$

peut s'écrire

$$x \in U \text{ et } L(x) \in V,$$