Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS
Autor: Delange, Hubert
Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 DANS LE CAS OU q = 2.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43864

3. Démonstration du théorème 1 dans le cas ou $q = 2$.

Remarquons d'abord que, d'après les résultats de Halász, si f est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m, n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$, il existe au plus un u réel tel que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-iu}]\} < +\infty$$

et au plus un u réel tel que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-iu}]\{ < +\infty$$

Ceci dit, nous allons maintenant démontrer le théorème 1 dans le cas où $q = 2$, sous la forme plus précise suivante:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(\mathrm{m}, \mathrm{n})| \leqslant 1$ quels que soient m *et* n $\geqslant 1$.

1. *Si l'on a l'une au moins des conditions*

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-iu}]\} = +\infty \quad \textit{pour tout } u \textit{ réel}$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-iu}]\} = +\infty \quad \textit{pour tout } u \textit{ réel,}$$

f possède une valeur moyenne nulle.

2. *S'il existe* a_1 *et* a_2 *réels tels que*

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

il y a deux cas possibles :

Ou bien

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0,$$

et alors f possède une valeur moyenne nulle.

Ou bien

$$\left(\sum_{j,k\geq 0}\frac{f(2^j,2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right)\left(\sum_{j,k\geq 0}\frac{f(3^j,3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right)\neq 0,$$

et alors on a quand x *et* y *tendent vers* $+\infty$ *indépendamment l'un de l'autre*

$$\frac{1}{xy}\sum_{\substack{m\leq x\\ n\leq y}} f(m,n) = C\,x^{ia_1}\,y^{ia_2}\,L_1(\log x)\,L_2(\log y) + o\,[1], \tag{6}$$

ou C *est une constante complexe non nulle et* L_1 *et* L_2 *sont les fonctions définies sur* $\mathcal{R}^+$ *par*

$$L_1(t) = \exp\left\{i\sum_{p\leq e^t}\frac{1}{p}\,Im\,[f(p,1)\,p^{-ia_1}]\right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp\left\{i\sum_{p\leq e^t}\frac{1}{p}\,Im\,[f(1,p)\,p^{-ia_2}]\right\},$$

qui satisfont à

$$|L_j(t)| = 1 \quad \textit{pour tout } t\in\mathbf{R}^+$$

et

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{L_j(\lambda t)}{L_j(t)} = 1 \quad \textit{pour tout } \lambda > 0 \quad (j = 1 \textit{ ou } 2),$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0,+\infty[$.

3.1. On peut d'abord écrire

$$f = f_1 * f_2, \tag{7}$$

où f_1 et f_2 sont définies comme il est dit au paragraphe 2.4.

Définissons maintenant les fonctions arithmétiques h_1 et h_2 par

$$h_1(m) = f_1(m,1) \qquad \text{et} \qquad h_2(n) = f_1(1,n).$$

On voit que h_1 et h_2 sont multiplicatives et que l'on a

$$h_1(p^r) = \begin{cases} f(p^r,1) \text{ si } p > 2,\\ 0 \quad \text{ si } p = 2,\end{cases} \tag{8}$$

et

$$h_2(p^r) = \begin{cases} f(1,p^r) \text{ si } p > 2,\\ 0 \quad \text{ si } p = 2.\end{cases} \tag{9}$$

De plus, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.3., on a

$$f_1 = g_1 * h, \tag{10}$$

où $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$ et g_1 est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|g_1(m, n)|}{m n} < +\infty \tag{11}$$

et, pour $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$,

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f_1(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f_1(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1(1, p^k)}{q^{kw_2}} \right] \right\},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \tag{12}$$

le produit infini étant absolument convergent.

(7) et (10) donnent $f = g * h$, où $g = f_2 * g_1$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 2.2.2, il résulte de (11) et de ce que

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|f_2(m, n)|}{m n} = \sum_{j,k \geq 0} \frac{|f(2^j, 2^k)|}{2^{j+k}} < +\infty,$$

que l'on a

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m n} < +\infty$$

et, pour $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$,

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{f_2(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{g_1(m_1 n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right),$$

ce qui donne, compte tenu de (12),

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} u^{w_2}} =$$

$$\left\{ \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{jw_1+kw_2}} \right\} \prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

En définitive, on a le résultat suivant:

h_1 et h_2 étant les fonctions de $\mathfrak{M}_1$ déterminées par (8) et (9), on a

$$f = g * h,$$

où $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$ et g est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m\, n} < +\infty \tag{13}$$

et, pour $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$,

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\left\{\sum_{j,k \geq 2} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{jw_1 + kw_2}}\right\} \prod_{p > 2} \left\{\left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}}\right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}}\right]\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}}\right]\right\}, \tag{14}$$

le produit infini étant absolument convergent.

3.2. Compte tenu de ce que $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$, l'égalité $f = g * h$ s'écrit

$$f(m, n) = \sum_{\substack{d_1 / m \\ d_2 / n}} g(d_1, d_2)\, h_1\left(\frac{m}{d_1}\right) h_2\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Ceci donne, pour x et $y \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} g(m, n)\, H_1\left(\frac{x}{m}\right) H_2\left(\frac{y}{n}\right), \tag{15}$$

où H_1 et H_2 sont les fonctions définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$H_1(x) = \sum_{m \leq x} h_1(m) \qquad \text{et} \qquad H_2(x) = \sum_{n \leq x} h_2(n).$$

Il est clair que l'on a

$$|H_1(x)| \leqslant x \qquad \text{et} \qquad |H_2(x)| \leqslant x \quad \text{pour tout } x \geqslant 1. \tag{16}$$

3.3. Ceci dit, supposons d'abord que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-iu}]\} = +\infty$$

pour tout u réel.

Il en résulte que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [h_1(p)\, p^{-iu}]\} = +\infty \text{ pour tout } u \text{ réel,}$$

ce qui entraine, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.1, que la fonction h_1 possède une valeur moyenne nulle. Autrement dit, $\frac{1}{x} H_1(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$

Mais (15) peut s'écrire

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{g(m, n)}{m\, n} \cdot \frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right) \cdot \frac{n}{y} H_2\left(\frac{y}{n}\right).$$

D'après (16), le terme général de la somme au second membre est de module au plus égal à $\frac{|g(m, n)|}{m\, n}$.

De plus, ce terme général tend vers zéro quand x et y tendent vers $+\infty$ puisque $\frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right)$ tend vers zéro.

Compte tenu de (13), il résulte de là que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers zéro quand x et y tendent vers $+\infty$. Autrement dit, f possède une valeur moyenne nulle.

On voit de même que f possède une valeur moyenne nulle si l'on a

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel.}$$

3.4. Supposons maintenant qu'il existe a_1 et a_2 réels tels que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p, 1)\, p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(1, p)\, p^{-ia_2}]\} < +\infty.$$

Il en résulte que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [h_1(p)\, p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [h_2(p)\, p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

et, d'après ce qui a été dit au paragraph 2.1, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} H_1(x) = C_1' x^{ia_1} K_1(\log x) + o[1] \tag{17}$$

et

$$\frac{1}{x} H_2(x) = C_2' x^{ia_2} K_2(\log x) + o[1], \tag{18}$$

où C_1' et C_2' sont deux constantes complexes non nulles et, pour $t \geqslant 0$,

$$K_1(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im[h_1(p) p^{-ia_1}]\right\}$$

et

$$K_2(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im[h_2(p) p^{-ia_2}]\right\}.$$

Si l'on pose

$$C_1 = C_1' \exp\left\{ -\frac{i}{2} Im[f(2, 1)\, 2^{-ia_1}]\right\}$$

$$C_2 = C_2' \exp\left\{ -\frac{i}{2} Im[f(1, 2)\, 2^{-ia_2}]\right\},$$

et, pour $t \geqslant 0$,

$$L_1(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im[f(p, 1) p^{-ia_1}]\right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im[f(1, p) p^{-ia_2}]\right\},$$

on voit que l'on a pour $t \geqslant \log 2$

$$C_1' K_1(t) = C_1 L_1(t) \qquad \text{et} \qquad C_2' K_2(t) = C_2 L_2(t),$$

de sorte que (17) et (18) peuvent s'écrire

$$H_1(x) = C_1 x^{1+ia_1} L_1(\log x) + o[1] \tag{19}$$

et

$$H_2(x) = C_2 x^{1+ia_2} L_2(\log x) + o[x]. \tag{20}$$

C_1 et C_2 sont encore des constantes complexes non nulles et, comme on a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{K_1(\lambda t)}{K_1(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{K_2(\lambda t)}{K_2(t)} = 1 \qquad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$, on a aussi

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{L_1(\lambda t)}{L_1(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{L_2(\lambda t)}{L_2(t)} = 1 \qquad \text{pour tout } \lambda > 0, \tag{21}$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$.

Notons que ceci entraine

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L_1(\log kx)}{L_1(\log x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{L_2(\log kx)}{L_2(\log x)} = 1 \qquad \text{pour tout } k > 0. \tag{22}$$

3.4.1. Maintenant (15) donne pour x et $y \geqslant 1$

$$\frac{1}{x^{1+ia_1} y^{1+ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y)} \sum_{\substack{m \le x \\ n \le y}} f(m, n) =$$

$$= \sum_{\substack{m \le x \\ n \le y}} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} \cdot \frac{H_1\left(\frac{x}{m}\right)}{\left(\frac{x}{m}\right)^{1+ia_1} L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)} \cdot \frac{H_2\left(\frac{y}{n}\right)}{\left(\frac{y}{n}\right)^{1+ia_2} L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)} \cdot$$

$$\frac{L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)}{L_1(\log x)} \cdot \frac{L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)}{L_2(\log y)} .$$

Le terme général de la somme du second membre est de module au plus égal à $\dfrac{|g(m, n)|}{m\,n}$.

De plus, il résulte de (19), (20) et (22) que ce terme général tend vers $C_1 C_2 \dfrac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}$ quand x et y tendent vers $+\infty$.

Compte tenu de (13), ceci entraine que, lorsque x et y tendent vers $+\infty$, la somme tend vers

$$C_1 C_2 \sum_{m,n \ge 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \le x \\ n \le y}} f(m, n) = C x^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y) + o\,[1],$$

où

$$C = C_1 C_2 \sum_{m,n \ge 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}.$$

3.4.2. Si $C = 0$, ceci implique que f possède une valeur moyenne nulle.

On voit donc que, pour établir le résultat annoncé, il ne reste plus qu'à montrer que l'on a

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} = 0$$

si, et seulement si,

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0.$$

Compte tenu de (14), il suffit de montrer que

$$\prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{j(1+ia_1)}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{k(1+ia_2)}} \right] \right\} = 0$$

si, et seulement si,

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 0.$$

Ceci résulte immédiatement de ce que tous les facteurs du produit autres que celui qui correspond à $p = 3$ sont non nuls.

En effet, on a pour chaque p

$$\left| \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right| \leqslant \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{1}{p^{j+k}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} - 1.$$

Pour $p > 3$, ceci est < 1 et par suite

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 1 + \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k>0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \neq 0.$$

4. Autres théorèmes

Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, f est une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m, n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Le théorème démontré au chapitre précédent fournit immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes pour que f possède une valeur moyenne nulle, car il est clair que, lorsque l'on a (6), le module de l'expression