

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS  
**Autor:** Delange, Hubert  
**Kapitel:** 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 DANS LE CAS OU  $q = 2$ .  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43864>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 DANS LE CAS OU $q = 2$ .

Remarquons d'abord que, d'après les résultats de Halász, si  $f$  est une fonction de  $\mathfrak{M}_2$  satisfaisant à  $|f(m, n)| \leq 1$  quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ , il existe au plus un  $u$  réel tel que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-iu}]\} < +\infty$$

et au plus un  $u$  réel tel que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-iu}]\} < +\infty$$

Ceci dit, nous allons maintenant démontrer le théorème 1 dans le cas où  $q = 2$ , sous la forme plus précise suivante:

Soit  $f$  une fonction de  $\mathfrak{M}_2$  satisfaisant à  $|f(m, n)| \leq 1$  quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ .

1. Si l'on a l'une au moins des conditions

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel}$$

et

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel},$$

$f$  possède une valeur moyenne nulle.

2. S'il existe  $a_1$  et  $a_2$  réels tels que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

il y a deux cas possibles :

Ou bien

$$\left( \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left( \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0,$$

et alors  $f$  possède une valeur moyenne nulle.

Où bien

$$\left( \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left( \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \neq 0,$$

et alors on a quand  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$  indépendamment l'un de l'autre

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C x^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1], \quad (6)$$

ou  $C$  est une constante complexe non nulle et  $L_1$  et  $L_2$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$L_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(p, 1) p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(1, p) p^{-ia_2}] \right\},$$

qui satisfont à

$$|L_j(t)| = 1 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+$$

et 
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L_j(\lambda t)}{L_j(t)} = 1 \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \quad (j = 1 \text{ ou } 2),$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans  $]0, +\infty[$ .

3.1. On peut d'abord écrire

$$f = f_1 * f_2, \quad (7)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont définies comme il est dit au paragraphe 2.4.

Définissons maintenant les fonctions arithmétiques  $h_1$  et  $h_2$  par

$$h_1(m) = f_1(m, 1) \quad \text{et} \quad h_2(n) = f_1(1, n).$$

On voit que  $h_1$  et  $h_2$  sont multiplicatives et que l'on a

$$h_1(p^r) = \begin{cases} f(p^r, 1) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2, \end{cases} \quad (8)$$

et

$$h_2(p^r) = \begin{cases} f(1, p^r) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2. \end{cases} \quad (9)$$

De plus, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.3., on a

$$f_1 = g_1 * h, \quad (10)$$

où  $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$  et  $g_1$  est une fonction de  $\mathfrak{M}_2$  satisfaisant à

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|g_1(m, n)|}{m n} < +\infty \quad (11)$$

et, pour  $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$ ,

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p > 2} \left\{ \left[ \sum_{j, k \geq 0} \frac{f_1(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f_1(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p > 2} \left\{ \left[ \sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \quad (12)$$

le produit infini étant absolument convergent.

(7) et (10) donnent  $f = g * h$ , où  $g = f_2 * g_1$ .

D'après ce qui a été dit au paragraphe 2.2.2, il résulte de (11) et de ce que

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|f_2(m, n)|}{m n} = \sum_{j, k \geq 0} \frac{|f(2^j, 2^k)|}{2^{j+k}} < +\infty,$$

que l'on a

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m n} < +\infty$$

et, pour  $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$ ,

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left( \sum_{m, n \geq 1} \frac{f_2(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left( \sum_{m, n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right),$$

ce qui donne, compte tenu de (12),

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left\{ \sum_{j, k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{jw_1 + kw_2}} \right\} \prod_{p > 2} \left\{ \left[ \sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

En définitive, on a le résultat suivant:

$h_1$  et  $h_2$  étant les fonctions de  $\mathfrak{M}_1$  déterminées par (8) et (9), on a

$$f = g * h,$$

où  $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$  et  $g$  est une fonction de  $\mathfrak{M}_2$  satisfaisant à

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m n} < +\infty \quad (13)$$

et, pour  $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$ ,

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left\{ \sum_{j, k \geq 2} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{jw_1 + kw_2}} \right\} \prod_{p \geq 2} \left\{ \left[ \sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \quad (14)$$

le produit infini étant absolument convergent.

3.2. Compte tenu de ce que  $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$ , l'égalité  $f = g * h$  s'écrit

$$f(m, n) = \sum_{\substack{d_1 | m \\ d_2 | n}} g(d_1, d_2) h_1\left(\frac{m}{d_1}\right) h_2\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ .

Ceci donne, pour  $x$  et  $y \geq 1$ ,

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} g(m, n) H_1\left(\frac{x}{m}\right) H_2\left(\frac{y}{n}\right), \quad (15)$$

où  $H_1$  et  $H_2$  sont les fonctions définies sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  par

$$H_1(x) = \sum_{m \leq x} h_1(m) \quad \text{et} \quad H_2(x) = \sum_{n \leq x} h_2(n).$$

Il est clair que l'on a

$$|H_1(x)| \leq x \quad \text{et} \quad |H_2(x)| \leq x \quad \text{pour tout } x \geq 1. \quad (16)$$

3.3. Ceci dit, supposons d'abord que l'on ait

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-iu}]\} = +\infty$$

pour tout  $u$  réel.

Il en résulte que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [h_1(p) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel,}$$

ce qui entraîne, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.1, que la fonction  $h_1$  possède une valeur moyenne nulle. Autrement dit,  $\frac{1}{x} H_1(x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$

Mais (15) peut s'écrire

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{g(m, n)}{mn} \cdot \frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right) \cdot \frac{n}{y} H_2\left(\frac{y}{n}\right).$$

D'après (16), le terme général de la somme au second membre est de module au plus égal à  $\frac{|g(m, n)|}{mn}$ .

De plus, ce terme général tend vers zéro quand  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$  puisque  $\frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right)$  tend vers zéro.

Compte tenu de (13), il résulte de là que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers zéro quand  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$ . Autrement dit,  $f$  possède une valeur moyenne nulle.

On voit de même que  $f$  possède une valeur moyenne nulle si l'on a

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel.}$$

3.4. Supposons maintenant qu'il existe  $a_1$  et  $a_2$  réels tels que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-ia_2}]\} < +\infty.$$

Il en résulte que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [h_1(p) p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [h_2(p) p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

et, d'après ce qui a été dit au paragraph 2.1, on a quand  $x$  tend vers  $+\infty$

$$\frac{1}{x} H_1(x) = C'_1 x^{ia_1} K_1(\log x) + o[1] \quad (17)$$

et

$$\frac{1}{x} H_2(x) = C'_2 x^{ia_2} K_2(\log x) + o[1], \quad (18)$$

où  $C'_1$  et  $C'_2$  sont deux constantes complexes non nulles et, pour  $t \geq 0$ ,

$$K_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [h_1(p) p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$K_2(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [h_2(p) p^{-ia_2}] \right\}.$$

Si l'on pose

$$C_1 = C'_1 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{Im} [f(2, 1) 2^{-ia_1}] \right\}$$

$$C_2 = C'_2 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{Im} [f(1, 2) 2^{-ia_2}] \right\},$$

et, pour  $t \geq 0$ ,

$$L_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(p, 1) p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(1, p) p^{-ia_2}] \right\},$$

on voit que l'on a pour  $t \geq \log 2$

$$C'_1 K_1(t) = C_1 L_1(t) \quad \text{et} \quad C'_2 K_2(t) = C_2 L_2(t),$$

de sorte que (17) et (18) peuvent s'écrire

$$H_1(x) = C_1 x^{1+ia_1} L_1(\log x) + o[1] \quad (19)$$

et

$$H_2(x) = C_2 x^{1+ia_2} L_2(\log x) + o[x]. \quad (20)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont encore des constantes complexes non nulles et, comme on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K_1(\lambda t)}{K_1(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K_2(\lambda t)}{K_2(t)} = 1 \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans  $]0, +\infty[$ ,

on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L_1(\lambda t)}{L_1(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L_2(\lambda t)}{L_2(t)} = 1 \quad \text{pour tout } \lambda > 0, \quad (21)$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans  $]0, +\infty[$ .

Notons que ceci entraîne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_1(\log kx)}{L_1(\log x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_2(\log kx)}{L_2(\log x)} = 1 \quad \text{pour tout } k > 0. \quad (22)$$

3.4.1. Maintenant (15) donne pour  $x$  et  $y \geq 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^{1+ia_1} y^{1+ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y)} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \\ &= \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} \cdot \frac{H_1\left(\frac{x}{m}\right)}{\left(\frac{x}{m}\right)^{1+ia_1} L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)} \cdot \frac{H_2\left(\frac{y}{n}\right)}{\left(\frac{y}{n}\right)^{1+ia_2} L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)} \cdot \\ & \quad \frac{L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)}{L_1(\log x)} \cdot \frac{L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)}{L_2(\log y)}. \end{aligned}$$

Le terme général de la somme du second membre est de module au plus égal à  $\frac{|g(m, n)|}{m n}$ .

De plus, il résulte de (19), (20) et (22) que ce terme général tend vers  $C_1 C_2 \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}$  quand  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$ .

Compte tenu de (13), ceci entraîne que, lorsque  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$ , la somme tend vers

$$C_1 C_2 \sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C x^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1],$$

où

$$C = C_1 C_2 \sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}.$$



3.4.2. Si  $C = 0$ , ceci implique que  $f$  possède une valeur moyenne nulle.

On voit donc que, pour établir le résultat annoncé, il ne reste plus qu'à montrer que l'on a

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} = 0$$

si, et seulement si,

$$\left( \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left( \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0.$$

Compte tenu de (14), il suffit de montrer que

$$\prod_{p > 2} \left\{ \left[ \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right] / \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{j(1+ia_1)}} \right] \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{k(1+ia_2)}} \right] \right\} = 0$$

si, et seulement si,

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 0.$$

Ceci résulte immédiatement de ce que tous les facteurs du produit autres que celui qui correspond à  $p = 3$  sont non nuls.

En effet, on a pour chaque  $p$

$$\left| \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right| \leq \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} \frac{1}{p^{j+k}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} - 1.$$

Pour  $p > 3$ , ceci est  $< 1$  et par suite

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 1 + \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \neq 0.$$

#### 4. AUTRES THÉORÈMES

Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit,  $f$  est une fonction de  $\mathfrak{M}_2$  satisfaisant à  $|f(m, n)| \leq 1$  quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ .

Le théorème démontré au chapitre précédent fournit immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $f$  possède une valeur moyenne nulle, car il est clair que, lorsque l'on a (6), le module de l'expression