

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS
Autor: Delange, Hubert
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43864>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS

par Hubert DELANGE

1. INTRODUCTION

Le résultat suivant a été conjecturé par Wirsing et démontré par G. Halász ¹⁾.

Soit f une fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

L'une des deux circonstances suivantes a lieu :

(a) f possède une valeur moyenne nulle (autrement dit, $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$).

(b) Il existe une constante complexe non nulle C , un nombre réel a et une fonction complexe L définie sur \mathbf{R}^+ et satisfaisant à

$$|L(t)| = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}^+$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda t)}{L(t)} = 1 \text{ pour tout } \lambda > 0,$$

la limite étant uniforme sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$, tels que l'on ait pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) = Cx^{ia} L(\log x) + o[1]. \quad (1)$$

Nous nous proposons ici d'étendre ce résultat aux fonctions multiplicatives de plusieurs entiers.

1.1. Nous désignons par \mathcal{A}_q l'ensemble des fonctions réelles ou complexes de q entiers strictement positifs.

¹⁾ WIRSING: „Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen. II“, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 18 (1967), p. 411-467.

G. HALÁSZ: „Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen“, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (1968), p. 365-403.

Nous disons que la fonction f de \mathcal{A}_q est « multiplicative » si l'on a

$$f(1, 1, \dots, 1) = 1$$

et $f(n'_1 n''_1, n'_2 n''_2, \dots, n'_q n''_q) = f(n'_1, n'_2, \dots, n'_q) f(n''_1, n''_2, \dots, n''_q)$ lorsque $(n'_1 n'_2 \dots n'_q, n''_1 n''_2 \dots n''_q) = 1$ ¹⁾.

Nous désignons par \mathfrak{M}_q l'ensemble des fonctions de \mathcal{A}_q qui sont multiplicatives.

Une fonction de \mathfrak{M}_q est complètement déterminée par les valeurs $f(p^{r_1}, p^{r_2}, \dots, p^{r_q})$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers et $[r_1, r_2, \dots, r_q]$ l'ensemble des systèmes de q entiers ≥ 0 non tous nuls. Ces valeurs peuvent d'ailleurs être choisies arbitrairement.

Nous appelons « valeur moyenne » de la fonction f de \mathcal{A}_q la limite de

$$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_q} \sum_{\substack{n_1 \leq x_1 \\ n_2 \leq x_2 \\ \dots \\ n_q \leq x_q}} f(n_1, n_2, \dots, n_q)$$

lorsque x_1, x_2, \dots, x_q tendent vers $+\infty$ indépendamment les uns des autres, si cette limite existe et est finie.

Lorsque f possède une valeur moyenne, nous désignons celle-ci par $M(f)$.

1.2. Ceci dit, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 1 : Soit f une fonction de \mathfrak{M}_q satisfaisant à $|f(n_1, n_2, \dots, n_q)| \leq 1$ quels que soient $n_1, n_2, \dots, n_q \in \mathbf{N}^*$.

Une des deux circonstances suivantes a lieu :

- (a) f possède une valeur moyenne nulle ;
- (b) Il existe une constante complexe non nulle C , des constantes réelles a_1, a_2, \dots, a_q et des fonctions complexes L_1, L_2, \dots, L_q définies sur \mathbf{R}^+ et satisfaisant à

$$|L_j(t)| = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}^+$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L_j(\lambda t)}{L_j(t)} = 1 \text{ pour tout } \lambda > 0 \text{ (} j=1, 2, \dots, q \text{),}$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$, telles que l'on ait quand x_1, x_2, \dots, x_q tendent vers $+\infty$ indépendamment les uns des autres

¹⁾ Cf H. DELANGE, « Sur les fonctions de plusieurs entiers strictement positifs », L'Enseignement Mathématique, 15 (1969), p. 77-88.

$$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_q} \sum_{\substack{n_1 \leq x_1 \\ n_2 \leq x_2 \\ \dots \\ n_q \leq x_q}} f(n_1, n_2, \dots, n_q) = \tag{2}$$

$$= C x_1^{ia_1} x_2^{ia_2} \dots x_q^{ia_q} L_1(\log x_1) \dots L_q(\log x_q) + o[1]$$

Nous démontrerons ce résultat en nous plaçant dans le cas où $q = 2$. Le lecteur verra facilement comment la démonstration doit être modifiée pour traiter le cas où $q > 2$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons n_1 et n_2 par m et n et x_1 et x_2 par x et y .

En restant dans le cas où $q = 2$, nous préciserons — comme on peut le faire pour le résultat de Halász — dans quel cas on a chacune des circonstances (a) et (b).

De plus, nous donnerons des théorèmes fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f de \mathfrak{M}_2 satisfaisant à

$$|f(m, n)| \leq 1 \text{ quels que soient } m \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

possède une valeur moyenne non nulle, ou pour que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Ici encore, le cas où $q = 2$ n'est pas essentiellement différent du cas où $q > 2$.

Enfin, nous indiquerons deux résultats particuliers intéressants.

1.3. Il est entendu une fois pour toutes que, tout au long de cet article, la lettre p représente toujours un nombre premier. Les lettres m, n, d, j, k, r, s représentent des entiers; m, n, d sont toujours des entiers ≥ 1 .

Une somme qui ne contient aucun terme est considérée comme nulle, et un produit qui n'a aucun facteur est considéré comme égal à 1.

2. PRÉLIMINAIRES

2.1. Il nous est utile de donner plus de précisions sur les résultats de Halász. f étant fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leq 1 \text{ pour tout } n \geq 1,$$

Halász montre d'abord qu'il existe au plus un u réel tel que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p) p^{-iu}]\} < +\infty \quad (3)$$

On a ensuite les résultats suivants :

1. S'il n'existe aucun u réel tel que l'on ait (3), f possède une valeur moyenne nulle.
2. Supposons maintenant qu'il existe un u réel tel que l'on ait (3), soit u_0 .

Alors,

a. Si $2^{-iru_0} f(2^r) = -1$ pour tout $r \geq 1$, f possède une valeur moyenne nulle.

b. Si $2^{-iru_0} f(2^r) \neq -1$ pour au moins un $r \geq 1$, on a (1) avec $a = u_0$ et

$$L_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq et} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(p) p^{-iu_0}] \right\}.$$

2.1.1. Ajoutons que, lorsque l'on est dans le cas 2 avec $u_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re f(p)\} < +\infty,$$

on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right] + o[1].$$

Ceci est une conséquence immédiate d'un théorème que nous avons établi ailleurs ²⁾.

2.2. Il nous est utile aussi de rappeler quelques notions et quelques résultats élémentaires concernant les fonctions de \mathcal{A}_2 , que nous avons indiqués dans l'article cité au paragraphe 1.1 (et qui se généralisent naturellement à \mathcal{A}_q).

2.2.1. Dans \mathcal{A}_2 on définit l'opération de convolution de la façon suivante :

$f * g$ est la fonction h définie par

$$h(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

La convolution est commutative et associative.

¹⁾ Il est clair que, pour chaque p , $1 - \Re [f(p) p^{-iu}] \geq 0$.

2.2.2. f et g étant deux fonctions de \mathcal{A}_2 et w_1 et w_2 deux variables complexes, si les séries doubles

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \quad \text{et} \quad \sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

sont absolument convergentes pour $\Re w_1 = \alpha$ et $\Re w_2 = \beta$, il en est de même de la série double

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}, \quad \text{où} \quad h = f * g,$$

et on a pour $\Re w_1 = \alpha$ et $\Re w_2 = \beta$

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right).$$

2.2.3. Toute fonction f de \mathcal{A}_2 telle que $f(1, 1) \neq 0$ peut se mettre sous la forme

$$f = g * h,$$

où $h(m, n) = f(m, 1) f(1, n)$ et g satisfait à

$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour} \quad m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \quad \text{pour} \quad n > 1.$$

Si f appartient à \mathfrak{M}_2 , les fonctions g et h appartiennent aussi à \mathfrak{M}_2 .

2.3. Indiquons aussi le résultat suivant:

Soit f une fonction de \mathfrak{M}_2 satisfaisant à $|f(m, n)| \leq 1$ quels que soient m et $n \geq 1$.

Supposons que

1° On n'a pas

$$|f(2, 1)| = 1 \quad \text{et} \quad f(2^r, 1) = (-1)^{r+1} f(2, 1)^r \quad \text{pour tout} \quad r > 1;$$

2° On n'a pas

$$|f(1, 2)| = 1 \quad \text{et} \quad f(1, 2^s) = (-1)^{s+1} f(1, 2)^s \quad \text{pour tout} \quad s > 1.$$

Alors la fonction g considérée au paragraphe 2.2.3 satisfait à

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m n} < +\infty, \tag{4}$$

de sorte que la série double

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

est absolument convergente pour $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$.

De plus, on a pour $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \quad (5)$$

le produit infini étant absolument convergent.

On trouvera dans notre article « On some sets of pairs of positive integers »¹⁾ (du haut de la page 272 à la fin du paragraphe 3.2.5) la démonstration, sous les mêmes hypothèses, de (4) et de la formule que donne (5) en y prenant $w_1 = w_2 = 1$. On verra immédiatement quelle petite modification de la démonstration permet d'obtenir (5) avec w_1 et w_2 quelconques satisfaisant à $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$.

Remarquons que les hypothèses 1° et 2° sont satisfaites en particulier si l'on a

$$f(2^r, 1) = 0 \text{ pour tout } r \geq 1 \quad \text{et} \quad f(1, 2^s) = 0 \text{ pour tout } s \geq 1.$$

Le facteur correspondant à $p = 2$ dans le produit infini au second membre de (5) est alors égal à 1, et (5) s'écrit

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

C'est ce cas particulier que nous utiliserons.

2.4. Nous utiliserons aussi la remarque immédiate suivante:

Soit f une fonction de \mathfrak{M}_2 et soient f_1 et f_2 les fonctions de \mathfrak{M}_2 déterminées par

$$f_1(p^r, p^s) = \begin{cases} f(p^r, p^s) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

et

$$f_2(p^r, p^s) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 2, \\ f(2^r, 2^s) & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

pour r et $s \geq 0$ et $r + s > 0$.

Alors on a

$$f = f_1 * f_2.$$

¹⁾ Journal of Number Theory, 1 (1969), p. 261-279.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 DANS LE CAS OU $q = 2$.

Remarquons d'abord que, d'après les résultats de Halász, si f est une fonction de \mathfrak{M}_2 satisfaisant à $|f(m, n)| \leq 1$ quels que soient m et $n \geq 1$, il existe au plus un u réel tel que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-iu}]\} < +\infty$$

et au plus un u réel tel que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-iu}]\} < +\infty$$

Ceci dit, nous allons maintenant démontrer le théorème 1 dans le cas où $q = 2$, sous la forme plus précise suivante:

Soit f une fonction de \mathfrak{M}_2 satisfaisant à $|f(m, n)| \leq 1$ quels que soient m et $n \geq 1$.

1. Si l'on a l'une au moins des conditions

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel}$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel,}$$

f possède une valeur moyenne nulle.

2. S'il existe a_1 et a_2 réels tels que

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

il y a deux cas possibles :

Ou bien

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0,$$

et alors f possède une valeur moyenne nulle.

Où bien

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \neq 0,$$

et alors on a quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C x^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1], \quad (6)$$

ou C est une constante complexe non nulle et L_1 et L_2 sont les fonctions définies sur \mathbb{R}^+ par

$$L_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq \text{et } p} \frac{1}{p} \text{Im} [f(p, 1) p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq \text{et } p} \frac{1}{p} \text{Im} [f(1, p) p^{-ia_2}] \right\},$$

qui satisfont à

$$|L_j(t)| = 1 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L_j(\lambda t)}{L_j(t)} = 1 \quad \text{pour tout } \lambda > 0 \quad (j = 1 \text{ ou } 2),$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$.

3.1. On peut d'abord écrire

$$f = f_1 * f_2, \quad (7)$$

où f_1 et f_2 sont définies comme il est dit au paragraphe 2.4.

Définissons maintenant les fonctions arithmétiques h_1 et h_2 par

$$h_1(m) = f_1(m, 1) \quad \text{et} \quad h_2(n) = f_1(1, n).$$

On voit que h_1 et h_2 sont multiplicatives et que l'on a

$$h_1(p^r) = \begin{cases} f(p^r, 1) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2, \end{cases} \quad (8)$$

et

$$h_2(p^r) = \begin{cases} f(1, p^r) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2. \end{cases} \quad (9)$$

De plus, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.3., on a

$$f_1 = g_1 * h, \quad (10)$$

où $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$ et g_1 est une fonction de \mathfrak{M}_2 satisfaisant à

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|g_1(m, n)|}{m n} < +\infty \quad (11)$$

et, pour $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$,

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j, k \geq 0} \frac{f_1(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f_1(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \quad (12)$$

le produit infini étant absolument convergent.

(7) et (10) donnent $f = g * h$, où $g = f_2 * g_1$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 2.2.2, il résulte de (11) et de ce que

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|f_2(m, n)|}{m n} = \sum_{j, k \geq 0} \frac{|f(2^j, 2^k)|}{2^{j+k}} < +\infty,$$

que l'on a

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m n} < +\infty$$

et, pour $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$,

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left(\sum_{m, n \geq 1} \frac{f_2(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left(\sum_{m, n \geq 1} \frac{g_1(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right),$$

ce qui donne, compte tenu de (12),

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left\{ \sum_{j, k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{jw_1 + kw_2}} \right\} \prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

En définitive, on a le résultat suivant:

h_1 et h_2 étant les fonctions de \mathfrak{M}_1 déterminées par (8) et (9), on a

$$f = g * h,$$

où $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$ et g est une fonction de \mathfrak{M}_2 satisfaisant à

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m n} < +\infty \quad (13)$$

et, pour $\Re w_1 = \Re w_2 = 1$,

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left\{ \sum_{j, k \geq 2} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{jw_1 + kw_2}} \right\} \prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1 + kw_2}} \right] / \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \quad (14)$$

le produit infini étant absolument convergent.

3.2. Compte tenu de ce que $h(m, n) = h_1(m) h_2(n)$, l'égalité $f = g * h$ s'écrit

$$f(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) h_1\left(\frac{m}{d_1}\right) h_2\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

quels que soient m et $n \geq 1$.

Ceci donne, pour x et $y \geq 1$,

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} g(m, n) H_1\left(\frac{x}{m}\right) H_2\left(\frac{y}{n}\right), \quad (15)$$

où H_1 et H_2 sont les fonctions définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$H_1(x) = \sum_{m \leq x} h_1(m) \quad \text{et} \quad H_2(x) = \sum_{n \leq x} h_2(n).$$

Il est clair que l'on a

$$|H_1(x)| \leq x \quad \text{et} \quad |H_2(x)| \leq x \quad \text{pour tout } x \geq 1. \quad (16)$$

3.3. Ceci dit, supposons d'abord que l'on ait

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-iu}]\} = +\infty$$

pour tout u réel.

Il en résulte que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [h_1(p) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel,}$$

ce qui entraîne, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.1, que la fonction h_1 possède une valeur moyenne nulle. Autrement dit, $\frac{1}{x} H_1(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$

Mais (15) peut s'écrire

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{g(m, n)}{mn} \cdot \frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right) \cdot \frac{n}{y} H_2\left(\frac{y}{n}\right).$$

D'après (16), le terme général de la somme au second membre est de module au plus égal à $\frac{|g(m, n)|}{mn}$.

De plus, ce terme général tend vers zéro quand x et y tendent vers $+\infty$ puisque $\frac{m}{x} H_1\left(\frac{x}{m}\right)$ tend vers zéro.

Compte tenu de (13), il résulte de là que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers zéro quand x et y tendent vers $+\infty$. Autrement dit, f possède une valeur moyenne nulle.

On voit de même que f possède une valeur moyenne nulle si l'on a

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-iu}]\} = +\infty \quad \text{pour tout } u \text{ réel.}$$

3.4. Supposons maintenant qu'il existe a_1 et a_2 réels tels que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(p, 1) p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [f(1, p) p^{-ia_2}]\} < +\infty.$$

Il en résulte que

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [h_1(p) p^{-ia_1}]\} < +\infty$$

et

$$\sum_p \frac{1}{p} \{1 - \Re [h_2(p) p^{-ia_2}]\} < +\infty,$$

et, d'après ce qui a été dit au paragraph 2.1, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} H_1(x) = C'_1 x^{ia_1} K_1(\log x) + o[1] \quad (17)$$

et

$$\frac{1}{x} H_2(x) = C'_2 x^{ia_2} K_2(\log x) + o[1], \quad (18)$$

où C'_1 et C'_2 sont deux constantes complexes non nulles et, pour $t \geq 0$,

$$K_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [h_1(p) p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$K_2(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [h_2(p) p^{-ia_2}] \right\}.$$

Si l'on pose

$$C_1 = C'_1 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{Im} [f(2, 1) 2^{-ia_1}] \right\}$$

$$C_2 = C'_2 \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{Im} [f(1, 2) 2^{-ia_2}] \right\},$$

et, pour $t \geq 0$,

$$L_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(p, 1) p^{-ia_1}] \right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(1, p) p^{-ia_2}] \right\},$$

on voit que l'on a pour $t \geq \log 2$

$$C'_1 K_1(t) = C_1 L_1(t) \quad \text{et} \quad C'_2 K_2(t) = C_2 L_2(t),$$

de sorte que (17) et (18) peuvent s'écrire

$$H_1(x) = C_1 x^{1+ia_1} L_1(\log x) + o[1] \quad (19)$$

et

$$H_2(x) = C_2 x^{1+ia_2} L_2(\log x) + o[x]. \quad (20)$$

C_1 et C_2 sont encore des constantes complexes non nulles et, comme on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K_1(\lambda t)}{K_1(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K_2(\lambda t)}{K_2(t)} = 1 \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$,

on a aussi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L_1(\lambda t)}{L_1(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L_2(\lambda t)}{L_2(t)} = 1 \quad \text{pour tout } \lambda > 0, \quad (21)$$

les limites étant uniformes sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, +\infty[$.

Notons que ceci entraîne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_1(\log kx)}{L_1(\log x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_2(\log kx)}{L_2(\log x)} = 1 \quad \text{pour tout } k > 0. \quad (22)$$

3.4.1. Maintenant (15) donne pour x et $y \geq 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^{1+ia_1} y^{1+ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y)} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = \\ &= \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} \cdot \frac{H_1\left(\frac{x}{m}\right)}{\left(\frac{x}{m}\right)^{1+ia_1} L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)} \cdot \frac{H_2\left(\frac{y}{n}\right)}{\left(\frac{y}{n}\right)^{1+ia_2} L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)} \cdot \\ & \frac{L_1\left(\log \frac{x}{m}\right)}{L_1(\log x)} \cdot \frac{L_2\left(\log \frac{y}{n}\right)}{L_2(\log y)}. \end{aligned}$$

Le terme général de la somme du second membre est de module au plus égal à $\frac{|g(m, n)|}{m n}$.

De plus, il résulte de (19), (20) et (22) que ce terme général tend vers $C_1 C_2 \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}$ quand x et y tendent vers $+\infty$.

Compte tenu de (13), ceci entraîne que, lorsque x et y tendent vers $+\infty$, la somme tend vers

$$C_1 C_2 \sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C x^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1],$$

où

$$C = C_1 C_2 \sum_{m, n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}}.$$

3.4.2. Si $C = 0$, ceci implique que f possède une valeur moyenne nulle.

On voit donc que, pour établir le résultat annoncé, il ne reste plus qu'à montrer que l'on a

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{1+ia_1} n^{1+ia_2}} = 0$$

si, et seulement si,

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right) = 0.$$

Compte tenu de (14), il suffit de montrer que

$$\prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right] / \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{j(1+ia_1)}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{k(1+ia_2)}} \right] \right\} = 0$$

si, et seulement si,

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 0.$$

Ceci résulte immédiatement de ce que tous les facteurs du produit autres que celui qui correspond à $p = 3$ sont non nuls.

En effet, on a pour chaque p

$$\left| \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \right| \leq \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} \frac{1}{p^{j+k}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} - 1.$$

Pour $p > 3$, ceci est < 1 et par suite

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} = 1 + \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}} \neq 0.$$

4. AUTRES THÉORÈMES

Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, f est une fonction de \mathfrak{M}_2 satisfaisant à $|f(m, n)| \leq 1$ quels que soient m et $n \geq 1$.

Le théorème démontré au chapitre précédent fournit immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes pour que f possède une valeur moyenne nulle, car il est clair que, lorsque l'on a (6), le module de l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers $|C|$ quand x et y tendent vers $+\infty$.

Nous nous proposons maintenant d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que f possède une valeur moyenne non nulle.

Nous chercherons aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Compte tenu de la remarque faite plus haut sur le cas où l'on a (6), on voit que ceci a lieu avec une limite nulle si, et seulement si, f possède une valeur moyenne nulle. Il reste à traiter le cas d'une limite non nulle.

4.1. Remarquons d'abord que le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

est convergent si, et seulement si, la série

$$\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$$

est convergente ¹⁾.

¹⁾ Rappelons que le produit infini $\prod_1^{+\infty} (1 + u_n)$ est dit convergent si

- 1° il a au plus un nombre fini de facteurs nuls;
- 2° le produit $\prod_{\substack{n \leq x \\ 1 + u_n \neq 0}} (1 + u_n)$ tend vers une limite finie non nulle quand x tend vers $+\infty$.

Quant le produit infini est convergent, sa valeur est par définition la limite de $\prod_{n \leq x} (1 + u_n)$ pour x tendant vers $+\infty$. Elle est nulle si, et seulement si, un au moins des facteurs est nul.

On voit facilement que, si la série $\sum_1^{+\infty} |u_n|^2$ est convergente, le produit infini

$\prod_1^{+\infty} (1 + u_n)$ est convergent ou non en même temps que la série $\sum_1^{+\infty} u_n$.

(Cf, par exemple, KNOPP: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen).

En effet, si l'on pose

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} = 1 + u_p,$$

on voit que l'on a quand p tend vers $+\infty$

$$u_p = \frac{1}{p} [f(p, 1) + f(1, p) - 2] + o\left[\frac{1}{p^2}\right].$$

La série $\sum |u_p|^2$ étant convergente, puisque $u_p = o\left[\frac{1}{p}\right]$, le produit infini $\prod (1 + u_p)$ est convergent si, et seulement si, la série $\sum u_p$ est convergente, ce qui donne le résultat annoncé.

Ajoutons que le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right),$$

lorsqu'il est convergent, est nul si, et seulement si,

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0,$$

car, pour $p > 3$,

$$\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \neq 0 \quad \text{puisque} \quad \left| \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right| \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} - 1 < 1.$$

4.2. Ceci dit, nous allons montrer d'abord que, pour que f possède une valeur moyenne non nulle, il faut et il suffit que

1° Les séries $\sum \frac{1}{p} [1 - f(p, 1)]$ et $\sum \frac{1}{p} [1 - f(1, p)]$ soient convergentes;

2° on ait $\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) \neq 0$.

Plus précisément, nous établirons le théorème suivant.

THÉORÈME 2: I. Si f possède une valeur moyenne non nulle, les séries

$\sum \frac{1}{p} [1 - f(p, 1)]$ et $\sum \frac{1}{p} [1 - f(1, p)]$ sont convergentes et on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) \neq 0. \quad (23)$$

II. Si les séries $\sum \frac{1}{p} [1 - f(p, 1)]$ et $\sum \frac{1}{p} [1 - f(1, p)]$ sont convergentes, $M(f)$ existe et est égale à la valeur du produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

(qui est convergent d'après ce que l'on a vu au paragraphe 4.1, et est nul si, et seulement si, on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0.$$

4.2.1. Supposons d'abord que f possède une valeur moyenne non nulle. Il existe nécessairement a_1 et a_2 réels tels que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e [f(p, 1) p^{-ia_1}]\} < +\infty \tag{24}$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e [f(1, p) p^{-ia_2}]\} < +\infty, \tag{25}$$

car, dans le cas contraire, f devrait posséder une valeur moyenne nulle. Pour la même raison, on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j(1+ia_1)+k(1+ia_2)}}\right) \neq 0. \tag{26}$$

On a donc (6).

Il résulte de (6) que, lorsque x et y tendent vers $+\infty$,

$$Cx^{ia_1} y^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log y)$$

tend vers $M(f)$.

Ceci entraîne que, quels que soient λ et $\mu > 0$,

$$C(\lambda x)^{ia_1} (\mu y)^{ia_2} L_1(\log \lambda x) L_2(\log \mu y)$$

tend aussi vers $M(f)$.

Mais le quotient de la deuxième expression par la première tend vers $\lambda^{ia_1} \mu^{ia_2}$.

On doit donc avoir

$$\lambda^{ia_1} \mu^{ia_2} = 1 \quad \text{quels que soient } \lambda \text{ et } \mu > 0,$$

ce qui nécessite $a_1 = a_2 = 0$.

Alors (26) donne (23), (24) et (25) donnent

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e [f(p, 1)]\} < +\infty \quad (27)$$

et

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e [f(1, p)]\} < +\infty, \quad (28)$$

et on voit que, quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre,

$$L_1(\log x) L_2(\log y) \quad \text{tend vers} \quad \frac{M(f)}{C}$$

(qui est de module 1 puisque $|L_1(\log x) L_2(\log y)| = 1$ pour x et $y \geq 1$).

Alors, à tout $\varepsilon > 0$ et $< 2\pi - \frac{1}{2}$ correspond $X_\varepsilon \geq 2$ tel que, pour x', x'', y' et $y'' \geq X_\varepsilon$,

$$|L_1(\log x'') L_2(\log y'') - L_1(\log x') L_2(\log y')| \leq 2 \sin \frac{\varepsilon}{4}.$$

En prenant $y' = y'' = X_\varepsilon$, on voit que l'on a

$$|L_1(\log x'') - L_1(\log x')| \leq 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } x' \text{ et } x'' \geq X_\varepsilon, \quad (29)$$

et, en prenant $x' = x'' = X_\varepsilon$, on voit que l'on a

$$|L_2(\log y'') - L_2(\log y')| \leq 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } y' \text{ et } y'' \geq X_\varepsilon. \quad (30)$$

Si l'on pose, pour x et $y \geq 1$,

$$A_1(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \text{Im} [f(p, 1)]$$

et

$$A_2(y) = \sum_{p \leq y} \frac{1}{p} \text{Im} [f(1, p)],$$

(29) et (30) s'écrivent

$$|\exp [iA_1(x'')] - \exp [iA_1(x')]| \leq 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } x' \text{ et } x'' \geq X_\varepsilon \quad (31)$$

et

$$| \exp [iA_2 (y'')] - \exp [iA_2 (y')] | \leq 2 \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } y' \text{ et } y'' \geq X_\varepsilon. \quad (32)$$

En prenant $x' = X_\varepsilon$ et $x'' = x$, on déduit de (31) que, pour $x \geq X_\varepsilon$, $A_1 (x)$ appartient à l'un des intervalles $[A_1 (X_\varepsilon) + 2k\pi - \frac{\varepsilon}{2}, A_1 (X_\varepsilon) + 2k\pi + \frac{\varepsilon}{2}]$, où $k \in \mathbf{Z}$.

La différence de deux nombres appartenant à deux de ces intervalles distincts est au moins égale à $2\pi - \varepsilon > \frac{1}{2}$.

Comme on a évidemment

$$| A_1 (x'') - A_1 (x') | \leq \frac{1}{2} \quad \text{pour } 2 \leq x' < x'' \leq x' + 2,$$

l'intervalle auquel appartient $A_1 (x)$ est le même pour tous les $x > X_\varepsilon$ que pour $x = X_\varepsilon$, c'est-à-dire celui qui correspond à $k = 0$.

On a donc $| A_1 (x) - A_1 (X_\varepsilon) | \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \geq X_\varepsilon$, et par suite

$$| A_1 (x'') - A_1 (x') | \leq \varepsilon \quad \text{pour } x' \text{ et } x'' \geq X_\varepsilon.$$

Il résulte de là que $A_1 (x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(p, 1)]$ est convergente.

On déduit de même de (32) que l'on a

$$| A_2 (y'') - A_2 (y') | \leq \varepsilon \quad \text{pour } y' \text{ et } y'' \geq X_\varepsilon,$$

et il en résulte que $A_2 (y)$ tend vers une limite finie quand y tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(1, p)]$ est convergente.

Avec (27) et (28), ceci montre que les séries

$$\sum \frac{1}{p} [1 - f(p, 1)] \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{p} [1 - f(1, p)]$$

sont convergentes.

La première partie du théorème 2 est ainsi démontrée.

4.2.2. Supposons maintenant que les séries

$$\sum \frac{1}{p} [1 - f(p, 1)] \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{p} [1 - f(1, p)]$$

soient convergentes.

Ceci entraîne que l'on a (27) et (28). Autrement dit, on a (24) et (25) avec $a_1 = a_2 = 0$.

Si l'on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}} \right) = 0.$$

f possède une valeur moyenne nulle.

Si au contraire on a (32), on a quand x et y tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1], \quad (33)$$

où C est une constante complexe non nulle,

$$L_1(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(p, 1)] \right\}$$

et

$$L_2(t) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(1, p)] \right\}.$$

Les séries

$$\sum \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(p, 1)] \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{p} \operatorname{Im} [f(1, p)]$$

étant convergentes, $L_1(t)$ et $L_2(t)$ tendent vers des limites finies, d'ailleurs de module 1, lorsque t tend vers $+\infty$. Alors (33) montre que f possède une valeur moyenne (de module égal à C).

Pour achever la démonstration de la deuxième partie du théorème 2, il reste à montrer que $M(f)$ est égale à la valeur du produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right).$$

Pour cela, reportons-nous à la démonstration du théorème 1 donnée au chapitre 3.

Puisque l'on a (27) et (28), on est dans le cas considéré au paragraphe 3.4, avec $a_1 = a_2 = 0$.

(19) et (20) donnent dans ce cas

$$\frac{1}{x} H_1(x) = C_1 L_1(\log x) + o[1] \quad (34)$$

et

$$\frac{1}{x} H_2(x) = C_2 L_2(\log x) + o[1]. \quad (35)$$

On sait que la constante C qui figure dans (6), réduit ici à (33), est donnée par

$$C = C_1 C_2 \sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m,n)}{m n}.$$

(33) peut donc s'écrire

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m,n) = C_1 C_2 \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m,n)}{m n} \right) L_1(\log x) L_2(\log y) + o[1],$$

et on voit que l'on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq x}} f(m,n) = C_1 C_2 \left(\sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m,n)}{m n} \right) L_1(\log x) L_2(\log x) + o[1]. \quad (36)$$

Mais, d'après ce qui a été dit au paragraphe 2.1.1, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} H_1(x) &= \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h_1(p^r)}{p^r} \right] + o[1] \\ &= \frac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j} \right) + o[1] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} H_2(x) &= \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{h_2(p^r)}{p^r} \right] + o[1] \\ &= \frac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k} \right) + o[1]. \end{aligned}$$

En comparant avec (34) et (35), on voit que l'on a

$$C_1 L_1(\log x) = \frac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j} \right) + o[1] \quad (37)$$

et

$$C_2 L_2(\log x) = \frac{1}{2} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k} \right) + o[1]. \quad (38)$$

Les produits sont de module au plus égal à 1 car on a pour chaque p

$$\left| \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j} \right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p^j} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

et

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

D'autre part, (14) donne

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \geq 1} \frac{g(m, n)}{m n} &= \left\{ \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}} \right\} \prod_{p > 2} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right] / \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k} \right] \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}} \right\} \prod_{2 < p \leq x} \left\{ \left[\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right] / \right. \\ &\quad \left. \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^j} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^k} \right] \right\} + o[1]. \end{aligned}$$

Avec (37) et (38), ceci montre que (36) peut s'écrire

$$\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq x}} f(m, n) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right) + o[1], \quad (39)$$

ce qui donne le résultat voulu.

Remarquons en passant que la démonstration de (39) a utilisé uniquement le fait que l'on a (27) et (28).

4.3. Convenons maintenant de dire que f possède une « valeur moyenne faible » si l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers une limite quand x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport. La valeur moyenne faible de f sera la limite en question.

Il est clair que, si f possède une valeur moyenne, elle possède aussi une valeur moyenne faible égale à sa valeur moyenne ordinaire.

Comme on l'a vu au début de ce chapitre, f possède une valeur moyenne faible nulle si, et seulement si, elle possède une valeur moyenne nulle.

Nous allons montrer maintenant que, pour que f possède une valeur moyenne faible non nulle, il faut et il suffit que

1° la série $\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$ soit convergente;

2° on ait $\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}} \right) \neq 0$ ¹⁾

Plus précisément, nous établirons le théorème suivant.

THÉORÈME 3: I. *S'il existe trois nombres strictement positifs distincts ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 tels que le rapport $\left(\log \frac{\rho_3}{\rho_1} \right) / \left(\log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$ soit irrationnel et tels que, pour $j = 1, j = 2$ et $j = 3$, l'expression*

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une même limite non nulle quand x et y tendent vers $+\infty$ avec

$\frac{y}{x} = \rho_j$ ²⁾ la série

$$\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$$

est convergente et on a (23).

¹⁾ On pourrait dire aussi qu'il faut et il suffit que le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right)$$

soit convergent et non nul.

²⁾ Cette hypothèse pourrait aussi se formuler de la façon suivante:

Il existe trois couples de nombres strictement positifs (α_1, β_1) , (α_2, β_2) , (α_3, β_3) tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \log \alpha_1 & \log \beta_1 & 1 & r_1 \\ \log \alpha_2 & \log \beta_2 & 1 & r_2 \\ \log \alpha_3 & \log \beta_3 & 1 & r_3 \end{vmatrix}$$

soit non nul quels que soient r_1, r_2 et $r_3 \in \mathbf{Z}$ et ne satisfaisant pas à $r_1 = r_2 = r_3$, et tels que, pour $j = 1, j = 2$ et $j = 3$, l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une même limite non nulle quand x et y tendent vers $+\infty$ avec $\frac{x}{\alpha_j} = \frac{y}{\beta_j}$.

La manière dont le résultat se généralise pour les fonctions de \mathcal{M}_q , où $q > 2$, est visible sous cette forme.

II. Si la série $\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$ est convergente, l'expression

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tend vers la valeur du produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

quand x et y tendent vers $+\infty$ de façon que les rapports $\frac{\log y}{\log x}$ et $\frac{\log x}{\log y}$ restent bornés¹⁾.

4.3.1. Supposons d'abord que $\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ tende vers une limite l non

nulle²⁾ quand x et y tendent vers $+\infty$ avec $\frac{y}{x} = \rho$.

Tout d'abord, comme au paragraphe 4.2.1, on est nécessairement dans le cas où il existe a_1 et a_2 réels tels que l'on ait (24) et (25), puisque, dans le cas contraire, $\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ devrait tendre vers zéro quand x et y

tendent vers $+\infty$.

Pour la même raison, on a (26).

On a donc (6).

Compte tenu de (6), il résulte de notre hypothèse que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$Cx^{ia_1} (\rho x)^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log \rho x) \text{ tend vers } l.$$

Ceci entraîne que, quel que soit $\lambda > 0$,

$$C(\lambda x)^{ia_1} (\rho \lambda x)^{ia_2} L_1(\log \lambda x) L_2(\log \rho \lambda x) \text{ tend aussi vers } l.$$

Mais le quotient de la deuxième expression par la première tend vers $\lambda^{i(a_1 + a_2)}$.

On doit donc avoir $\lambda^{i(a_1 + a_2)} = 1$ pour tout $\lambda > 0$, ce qui nécessite $a_1 + a_2 = 0$.

Alors on voit que, quand x tend vers $+\infty$,

¹⁾ Il convient de se rappeler ce qui a été dit à la fin du paragraphe 4.1.

²⁾ l est nécessairement finie, et même de module ≤ 1 , puisque c'est la limite d'une quantité qui est visiblement de module ≤ 1 .

$$C\rho^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log \rho x) \text{ tend vers } l.$$

4.3.2. Supposons maintenant qu'il existe trois nombres strictement positifs

distincts ρ_1, ρ_2 et ρ_3 tels que le rapport $\left(\log \frac{\rho_3}{\rho_1}\right) / \left(\log \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ soit irrationnel

et tels que, pour $j = 1, j = 2$ et $j = 3$, $\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ tende vers $l \neq 0$

quand x et y tendent vers $+\infty$ avec $\frac{y}{x} = \rho_j$.

Alors, d'après ce qui précède, on est dans le cas où il existe a_1 et a_2 réels tels que l'on ait (24) et (25) et on a (26), de sorte que l'on a (6), et en outre on a $a_1 + a_2 = 0$ et, quand x tend vers $+\infty$,

$$C\rho_j^{ia_2} L_1(\log x) L_2(\log \rho_j x) \text{ tend vers } l \text{ pour } j = 1, 2, 3.$$

En considérant des quotients, on voit que

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{ia_2} = \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{ia_2} = 1.$$

Autrement dit, il existe k_2 et $k_3 \in \mathbf{Z}$ tels que

$$a_2 \log \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2k_2\pi \quad \text{et} \quad a_2 \log \frac{\rho_3}{\rho_1} = 2k_3\pi.$$

Si a_2 n'était pas nul, k_1 et k_2 ne le seraient pas et on aurait $\left(\log \frac{\rho_3}{\rho_1}\right) / \left(\log \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{k_3}{k_2}$, contrairement à l'hypothèse que ce rapport est irrationnel.

On a donc $a_2 = 0$, et par suite aussi $a_1 = 0$.

Alors (26) donne (23); (24) et (25) donnent (27) et (28); (6) se réduit à (33). De plus, on voit que, quand x tend vers $+\infty$,

$$C L_1(\log x) L_2(\log \rho_j x) \text{ tend vers } l,$$

et par suite

$$C L_1(\log x) L_2(\log x) \text{ tend vers } l.$$

(33) montre que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq x}} f(m, n) = C L_1(\log x) L_2(\log x) + o[1].$$

Donc $\frac{1}{x^2} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq x}} f(m, n)$ tend vers l .

Mais, d'après la remarque de la fin du paragraphe 4.2.2, on a (39) puisque l'on a (27) et (28).

On voit ainsi que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right) \text{ tend vers } l.$$

Le produit infini $\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$ est donc convergent, et par conséquent la série $\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$ est convergente d'après ce qui a été dit au paragraphe 4.1.

La première partie du théorème 3 est ainsi complètement démontrée.

4.3.3. Supposons maintenant que la série

$$\sum \frac{1}{p} [2 - f(p, 1) - f(1, p)]$$

soit convergente.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 4.1, ceci entraîne que le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

est convergent.

De plus, on a $\sum \frac{1}{p} \{2 - \Re e [f(p, 1)] - \Re e [f(1, p)]\} < +\infty$, ce qui entraîne évidemment (27) et (28).

Autrement dit, on a (24) et (25) avec $a_1 = a_2 = 0$.

Si l'on a

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}}\right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}}\right) = 0,$$

f possède une valeur moyenne nulle et le produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}}\right)$$

est nul, et l'on a bien le résultat voulu.

Si, au contraire, on a (23), quand x et y tendent vers $+\infty$, on a (33), où C est une constante complexe non nulle et les fonctions L_1 et L_2 sont données par les formules indiquées au paragraphe 4.2.2.

D'après les propriétés de L_1 et L_2 , si x et y tendent vers $+\infty$ de façon que les rapports $\frac{\log y}{\log x}$ et $\frac{\log x}{\log y}$ restent bornés, on a

$$L_2(\log y) = L_2(\log x) + o[1]$$

et (33) donne

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n) = C L_1(\log x) L_2(\log x) + o[1].$$

Mais on a pour $x \geq 1$

$$L_1(\log x) L_2(\log x) = \exp \left\{ i \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} (Im [f(p, 1)] + Im [f(1, p)]) \right\}$$

et la série

$$\sum \frac{1}{p} \{ Im [f(p, 1)] + Im [f(1, p)] \}$$

est évidemment convergente.

Si S est la somme de cette série, $L_1(\log x) L_2(\log x)$ tend vers e^{iS} quand x tend vers $+\infty$.

On voit alors que $\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$ tend vers Ce^{iS} quand x et y tendent

vers $+\infty$ de façon que les rapports $\frac{\log y}{\log x}$ et $\frac{\log x}{\log y}$ restent bornés.

Pour achever de démontrer la deuxième partie du théorème 3, il ne reste plus qu'à montrer que cette limite Ce^{iS} est égale à la valeur du produit infini

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(\sum_{j, k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{j+k}} \right).$$

Ceci résulte de ce que, d'après la remarque de la fin du paragraphe, on a (39) puisque l'on a (27) et (28).

4.4. Pour terminer, indiquons deux résultats particuliers qui nous paraissent intéressants.

THÉORÈME 4: *S'il existe $K > 0$ tel que l'on ait pour tout p*

$$| \operatorname{Im} f(p, 1) | \leq K [1 - \operatorname{Re} f(p, 1)] \quad \text{et} \quad | \operatorname{Im} f(1, p) | \leq K [1 - \operatorname{Re} f(1, p)],$$

f possède une valeur moyenne.

$M(f)$ est nulle si, et seulement si, on a

$$\sum \frac{1}{p} [2 - \operatorname{Re} f(p, 1) - \operatorname{Re} f(1, p)] = +\infty$$

ou

$$\left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(2^j, 2^k)}{2^{j+k}} \right) \left(\sum_{j,k \geq 0} \frac{f(3^j, 3^k)}{3^{j+k}} \right) = 0.$$

THÉORÈME 5: *Si l'on a, quand x tend vers $+\infty$, l'une ou l'autre des relations*

$$\sum_{p \leq x} f(p, 1) \log p = \rho x + o[x] \tag{40}$$

et

$$\sum_{p \leq x} f(1, p) \log p = \rho x + o[x], \tag{41}$$

avec $\rho \neq 1$, f possède une valeur moyenne nulle.

Le résultat subsiste avec $\rho = 1$ à condition d'ajouter la condition

$$\sum \frac{1}{p} [1 - \operatorname{Re} f(p, 1)] = +\infty$$

dans le cas ou l'on a (40), et la condition

$$\sum \frac{1}{p} [1 - \operatorname{Re} f(1, p)] = +\infty$$

dans le cas ou l'on a (41).

Ces deux théorèmes peuvent être déduits de la première partie du théorème 1, tel qu'il est énoncé au paragraphe 3 pour $q = 2$, et de la deuxième partie du théorème 2.

On peut aussi les démontrer en reprenant ce qui a été dit aux paragraphes 3.1 et 3.2 et utilisant des théorèmes analogues relatifs au cas d'une fonction de \mathcal{M}_1 ¹⁾.

(Reçu le 6 octobre 1970)

H. Delange

Faculté des Sciences
91 - Orsay (France)

¹⁾ Théorème B (dû à Wirsing) énoncé à la page 275 de notre article cité au paragraphe 2.3 et théorème principal de notre mémoire « Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications » (Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), 78 (1961), p. 1-29).