Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENTIERS ALGÉBRIQUES POLYGONES ET POLYÈDRES RÉGULIERS

Autor: PÓLYA, G.

Kapitel: III. Polyèdres réguliers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43224

III. Polyèdres réguliers

3.1. Nous considérons l'angle dièdre formé par deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier à l'intérieur du solide. Nous allons désigner cet angle dièdre par

$$T\,, \qquad H\,, \qquad O\,, \qquad D\,, \qquad \text{ou } I$$

selon qu'il s'agit d'un

tétra-, hexa-, octa-, dodéca-, ou icosa-

èdre régulier. Le hexaèdre régulier est le cube, $H = \pi/2$. On peut calculer tous ces angles par trigonométrie sphérique; notons les résultats:

$$\cos T = \tfrac{1}{3}\,, \ \cos H = 0\,, \ \cos O = -\tfrac{1}{3}\,, \ \cos 2D = -\tfrac{3}{5}\,, \ \cos 2I = \tfrac{1}{9}\,.$$

Il résulte des trois premières valeurs que

$$T - 2H + O = 0 \tag{1}$$

ce que le lecteur peut aussi voir par géométrie élémentaire. Cette relation (1) est unique en son genre — c'est un premier aperçu de notre résultat principal qui sera formulé précisément au n° 3.6.

3.2. *Les rapports*

$$T/H\,, \qquad O/H\,, \qquad D/H\,, \qquad I/H$$

sont irrationnels.

Cette proposition résulte immédiatement des valeurs rationnelles des cosinus données au n° 3.1 et du théorème du n° 1.2.

3.3. *Le rapport T/O est irrationnel.*

En effet, si T/O était rationnel, H/O le serait aussi par la relation (1) du n° 3.1. Mais H/O est irrationnel par le théorème du n° 3.2.

3.4. *Si les entiers ordinaires* l, m′, h′ *et* k′ *satisfont à l'équation*

$$lT + m'I = h'H + k'D\,,$$

alors

$$l = m' = h' = k' = 0\,.$$

Nous pouvons admettre sans perte de généralité que $m' = 2m$ et $k' = 2k$ sont des nombres pairs et $h' = 4h$ est divisible par 4. En effet, si ce n'était pas le cas il suffirait de multiplier la relation donnée par 4 et de changer la notation.

Nous voulons donc établir que la relation

$$(*) \qquad lT + 2mI = 4hH + 2kD$$

est impossible en nombres entiers ordinaires l, m, h et k qui ne sont pas tous $= 0$. Dans le présent n° 3.4 je ne considère que le cas où k, l et m sont tous *positifs*. Puisque $4H = 2\pi$, la relation (*) est équivalente à la suivante

$$(**) \qquad e^{ilT}\, e^{i2mI} = e^{i2kD}\,.$$

Mais, voir n° 3.1, on obtient, en développant les puissances des binômes,

$$e^{i2kD} = \left(\frac{-3-i4}{5}\right)^k = K + K'i\,,$$

$$e^{ilT} = \left(\frac{1+2i\sqrt{2}}{3}\right)^l = L + L'i\sqrt{2}$$

$$e^{i2mI} = \left(\frac{1-4i\sqrt{5}}{9}\right)^m = M + M'i\sqrt{5}$$

où K, K', L, L', M et M' sont des nombres rationnels.

Observons que $K' = 0$ entraînerait $K = \pm 1$, et ainsi D/π serait rationnel, ce qui n'est pas le cas, voir n° 3.2. Donc $K' \neq 0$ et par le même raisonnement $L' \neq 0$, $M' \neq 0$.

Il suit de (**) que

$$L'M\sqrt{2} + LM'\sqrt{5} = K'\,.$$

Observons que $L = 0$ entraînerait $M \neq 0$ et ainsi $\sqrt{2}$ serait rationnel. Donc $L \neq 0$ et par un raisonnement semblable $M \neq 0$.

Donc $LML'M' \neq 0$. Mais en élevant au carré l'équation précédente on obtient que

$$LML'M'\sqrt{10}$$

est un nombre rationnel. Cette conséquence absurde démontre que (*) est impossible si l, m et k sont positifs.

3.5. Le cas traité au numéro précédent, où k, l et m sont positifs, est décisif: Les autres cas se laissent traiter de la même manière ou sont encore plus simples.

Par exemple, si $l < 0$ on développera la $(-l)$ième puissance du binôme

$$e^{ilT} = \left(\frac{1-2i\sqrt{2}}{3}\right)^{-l} = L + L' i \sqrt{2}$$

et on aura les mêmes conséquences qu'au n° 3.4.

Si $l = 0$ et $m = 0$ on a nécessairement $k = 0$; dans le cas contraire, e^{iD} serait, en vertu de (**), une racine de l'unité ce qui contredirait la proposition du n° 3.2.

Enfin le cas ou $l = 0$, $m \neq 0$ et $k \neq 0$ est aussi exclu; on en pourrait conclure, voir l'équation (**) et les formules et les raisonnements du n° 3.4 qui la suivent, que K' et M' sont rationnels et non-nuls et que

$$M + M' i \sqrt{3} = K + K' i$$

donc que $\sqrt{3}$ est rationnel ce qui est absurde.

3.6. *Si* x_1, x_2, x_3, x_4 *et* x_5 *sont des entiers ordinaires et*

$$x_1 T + x_2 H + x_3 O + x_4 D + x_5 I = 0,$$

on a nécessairement

$$2x_1 = -x_2 = 2x_3, \quad x_4 = x_5 = 0.$$

Voici un autre énoncé de la même proposition:

Excepté une transformation triviale l'équation (1) *du n°* 3.1 *est l'unique relation linéaire homogène à coefficients entiers ordinaires entre les cinq angles, T, H, O, D et I.*

Le cas de cet énoncé où $x_3 = 0$ a été démontré aux n^os 3.4 et 3.5. On y ramène le cas où $x_3 \neq 0$ et la relation considérée n'est pas une transformée triviale de (1) en éliminant O [1]).

(Reçu le 16 Juillet 1968)

Dept. mathematics
Stanford University
Stanford, California 94305
Etats-Unis

[1]) La proposition du n° 3.6 est due à H. LEBESGUE; voir *Annales de la Société polonaise de Mathématique*, 71, 193-226, 1938.

vide-leer-empty