Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENTIERS ALGÉBRIQUES POLYGONES ET POLYÈDRES RÉGULIERS

Autor: PÓLYA, G.

Kapitel: III. Polyèdres réguliers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43224

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

III. Polyèdres réguliers

3.1. Nous considérons l'angle dièdre formé par deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier à l'intérieur du solide. Nous allons désigner cet angle dièdre par

$$T, \qquad H, \qquad O, \qquad D, \qquad \text{ou } I$$

selon qu'il s'agit d'un

tétra-, hexa-, octa-, dodéca-, ou icosa-

èdre régulier. Le hexaèdre régulier est le cube, $H = \pi/2$. On peut calculer tous ces angles par trigonométrie sphérique; notons les résultats:

$$\cos T = \tfrac{1}{3}, \cos H = 0, \cos O = -\tfrac{1}{3}, \cos 2D = -\tfrac{3}{5}, \cos 2I = \tfrac{1}{9}.$$

Il résulte des trois premières valeurs que

$$T - 2H + O = 0 \tag{1}$$

ce que le lecteur peut aussi voir par géométrie élémentaire. Cette relation (1) est unique en son genre — c'est un premier aperçu de notre résultat principal qui sera formulé précisément au n° 3.6.

3.2. *Les rapports*

$$T/H, \qquad O/H, \qquad D/H, \qquad I/H$$

sont irrationnels.

Cette proposition résulte immédiatement des valeurs rationnelles des cosinus données au n° 3.1 et du théorème du n° 1.2.

3.3. *Le rapport T/O est irrationnel.*

En effet, si T/O était rationnel, H/O le serait aussi par la relation (1) du n° 3.1. Mais H/O est irrationnel par le théorème du n° 3.2.

3.4. *Si les entiers ordinaires* l, m′, h′ *et* k′ *satisfont à l'équation*

$$lT + m'I = h'H + k'D,$$

alors

$$l = m' = h' = k' = 0.$$

Nous pouvons admettre sans perte de généralité que $m' = 2m$ et $k' = 2k$ sont des nombres pairs et $h' = 4h$ est divisible par 4. En effet, si ce n'était pas le cas il suffirait de multiplier la relation donnée par 4 et de changer la notation.

Nous voulons donc établir que la relation

$$(*) \qquad lT + 2mI = 4hH + 2kD$$

est impossible en nombres entiers ordinaires l, m, h et k qui ne sont pas tous $= 0$. Dans le présent n° 3.4 je ne considère que le cas où k, l et m sont tous *positifs*. Puisque $4H = 2\pi$, la relation (*) est équivalente à la suivante

$$(**) \qquad e^{ilT}\, e^{i2mI} = e^{i2kD}\,.$$

Mais, voir n° 3.1, on obtient, en développant les puissances des binômes,

$$e^{i2kD} = \left(\frac{-3-i4}{5}\right)^k = K + K'\,i\,,$$

$$e^{ilT} = \left(\frac{1+2i\sqrt{2}}{3}\right)^l = L + L'\,i\sqrt{2}$$

$$e^{i2mI} = \left(\frac{1-4i\sqrt{5}}{9}\right)^m = M + M'\,i\sqrt{5}$$

où K, K', L, L', M et M' sont des nombres rationnels.

Observons que $K' = 0$ entraînerait $K = \pm 1$, et ainsi D/π serait rationnel, ce qui n'est pas le cas, voir n° 3.2. Donc $K' \neq 0$ et par le même raisonnement $L' \neq 0$, $M' \neq 0$.

Il suit de (**) que

$$L'\,M\sqrt{2} + LM'\sqrt{5} = K'\,.$$

Observons que $L = 0$ entraînerait $M \neq 0$ et ainsi $\sqrt{2}$ serait rationnel. Donc $L \neq 0$ et par un raisonnement semblable $M \neq 0$.

Donc $LML'M' \neq 0$. Mais en élevant au carré l'équation précédente on obtient que

$$LML'\,M'\sqrt{10}$$

est un nombre rationnel. Cette conséquence absurde démontre que (*) est impossible si l, m et k sont positifs.

3.5. Le cas traité au numéro précédent, où k, l et m sont positifs, est décisif: Les autres cas se laissent traiter de la même manière ou sont encore plus simples.

Par exemple, si $l<0$ on développera la $(-l)$ième puissance du binôme

$$e^{ilT} = \left(\frac{1-2i\sqrt{2}}{3}\right)^{-l} = L + L' i \sqrt{2}$$

et on aura les mêmes conséquences qu'au n° 3.4.

Si $l = 0$ et $m = 0$ on a nécessairement $k = 0$; dans le cas contraire, e^{iD} serait, en vertu de (**), une racine de l'unité ce qui contredirait la proposition du n° 3.2.

Enfin le cas ou $l = 0$, $m \neq 0$ et $k \neq 0$ est aussi exclu; on en pourrait conclure, voir l'équation (**) et les formules et les raisonnements du n° 3.4 qui la suivent, que K' et M' sont rationnels et non-nuls et que

$$M + M' i \sqrt{3} = K + K' i$$

donc que $\sqrt{3}$ est rationnel ce qui est absurde.

3.6. *Si* x_1, x_2, x_3, x_4 *et* x_5 *sont des entiers ordinaires et*

$$x_1 T + x_2 H + x_3 O + x_4 D + x_5 I = 0,$$

on a nécessairement

$$2x_1 = -x_2 = 2x_3, \qquad x_4 = x_5 = 0.$$

Voici un autre énoncé de la même proposition:

Excepté une transformation triviale l'équation (1) *du n°* 3.1 *est l'unique relation linéaire homogène à coefficients entiers ordinaires entre les cinq angles, T, H, O, D et I.*

Le cas de cet énoncé où $x_3 = 0$ a été démontré aux n°s 3.4 et 3.5. On y ramène le cas où $x_3 \neq 0$ et la relation considérée n'est pas une transformée triviale de (1) en éliminant O [1]).

(Reçu le 16 Juillet 1968)

Dept. mathematics
Stanford University
Stanford, California 94305
Etats-Unis

[1]) La proposition du n° 3.6 est due à H. LEBESGUE; voir *Annales de la Société polonaise de Mathématique*, 71, 193-226, 1938.

vide-leer-empty