Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENTIERS ALGÉBRIQUES POLYGONES ET POLYÈDRES RÉGULIERS

Autor: PÓLYA, G.

Kapitel: II. Polygones réguliers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43224

$$0, \frac{1}{3}, 1, 3, \frac{1}{0}.$$

(J'ai pris la liberté de regarder $\infty = 1/0$ comme « rationnel ».)

Par hypothèse, $2\theta/\pi$ et

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

sont rationnels tous les deux et ainsi nous n'avons qu'à appliquer la proposition du n° 1.2.

1.4. *Excepté les quatre cas suivants:* n = 1, 2, 4, *et* 8, tan 2π/n *est un nombre irrationnel pour chaque entier ordinaire positif* n.

En observant que $\sqrt{3}$ est irrationnel, on déduira facilement cette proposition de celle du n° 1.3 [1]).

II. Polygones réguliers

2.1. Nous considérons un système de coordonnées rectangulaires dans le plan et nous appellerons *point du réseau plan* un point (x, y) dont les deux coordonnées x et y sont des entiers ordinaires.

Si un polygone á n *côtés est équiangle et tous ses sommets sont des points du réseau plan,* n *est nécessairement* 4 *ou* 8.

Appelons une ligne droite *ligne du réseau* si elle contient deux points différents du réseau plan. La tangente de l'angle qu'une ligne du réseau fait avec l'axe des abscisses est évidemment rationnelle. Je dis que la tangente de l'angle compris par deux droites quelconques du réseau est aussi rationnelle. En effet, soient α et β les angles que ces deux droites font avec l'axe des abscisses. L'angle compris par elles est $\alpha - \beta$ et

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

L'angle extérieur formé par deux côtés consécutifs d'un polygone équiangle à n côtés est $2\pi/n$. Dans notre cas, par hypothèse, les deux côtés sont des droites du réseau et ainsi tan $2\pi/n$ doit être rationnelle. Par le théorème du n° 1.4, n est égal à 4 ou à 8.

---

[1]) La proposition du n° 1.2 a été énoncée et démontrée différemment par H. Hadwiger, *Elemente der Math.*, **1**, 98-100, 1946. Elle n'est en effet que le cas particulier le plus simple de la proposition générale suivante: *Soient* k *et* n *deux entiers ordinaires premiers entre eux,* n > 2. *Alors* 2 cos (2πk/n) *sera un entier algébrique de degré* φ (n)/2; voir D. H. Lehmer, *Amer. Math. Monthly*, **40**, 165-166, 1933. (Un entier algébrique est rationnel s'il est de degré 1; si $\varphi(n)/2 = 1$ on a $n = 3, 4$ ou 6.)

Le lecteur dessinera un octogone équiangle (chaque angle $= 3\pi/4$) dont les huit sommets sont des points du réseau plan.

2.2. *Un polygone régulier dont tous les sommets sont des points du réseau plan est nécessairement un carré.*

Le cas de l'octogone admis par la proposition du n° 2.1 sera exclu par la proposition du n° 2.3.

2.3. Nous considérons maintenant un système de coordonnées rectangulaires dans l'espace. Nous appellerons *point du réseau spatial* un point (x, y, z) dont les trois coordonnées x, y et z sont des entiers ordinaires.

Si tous les sommets d'un polygone régulier à n *côtés sont des points du réseau spatial,* n *est nécessairement* 3, 4 *ou* 6.

Trois sommets consécutifs du polygone régulier P à n côtés déterminent un triangle isocèle T. Deux côtés de T, de la même longueur c, sont des côtés adjacents de P et la base de T, de longueur d, est une diagonale de P. L'angle opposé à la base de T (un angle de P) est égal à $\pi\,(n-2)/n$. On a

$$d^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos \pi\,(n-2)/n\,.$$

Mais les sommets de T sont des points du réseau, par conséquent c^2 et d^2 sont des entiers ordinaires et ainsi $\cos \pi\,(n-2)/n$ est rationnel. Donc $n = 3$, 4 ou 6, par la proposition du n° 1.2.

Les points

$$(1, 0, 0)\,, \quad (0, 1, 0)\,, \quad (0, 0, 1)$$

sont les sommets d'un triangle équilatéral et les points

$$(0, 1, -1)\,, \quad (1, 0, -1)\,, \quad (1, -1, 0), \quad (0, -1, 1)\,, \quad (-1, 0, 1)\,, \quad (-1, 1, 0)$$

sont les sommets d'un hexagone régulier.

C'est l'application de la proposition démontrée aux points du réseau spatial de la forme particulière $(x, y, 0)$ qui joue un rôle au n° 2.2.

Est-il possible que tous les sommets d'un polyèdre régulier soient des points du réseau spatial ? Oui, pour le tétraèdre, cube et octaèdre, non pour le dodécaèdre et l'icosaèdre; en effet, dans ces deux derniers cas il y a des pentagones réguliers formés par cinq sommets [1]).

---

1) La proposition du n° 2.2 peut être démontrée par des considérations géométriques élégantes; les démonstrations données par F. Karteszi, *Matematikai és fizikai lapok*, **50**, 182-183, 1943 et W. Scherrer, *Elemente der Math.*, **1**, 97-98, 1946 sont semblables mais différentes. La démonstration de la proposition du n° 2.3 est due à H. E. Chrestenson, *Amer. Math. Monthly*, **70**, 447-448, 1963; elle est applicable à un réseau « cubique » à dimension quelconque.