Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MATRIXTRANSFORMATIONEN MIT VOLLER REICHWEITE

Autor: Meyer-König, W. / Zeller, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43223

MATRIXTRANSFORMATIONEN MIT VOLLER REICHWEITE

W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER

J. Karamata zum Gedächtnis

Die gebräuchlichsten Limitierungsverfahren beruhen auf Matrixtransformationen der Gestalt

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

(wobei von den Reihen gewöhnliche Konvergenz verlangt wird). Unter diesen Transformationen interessieren besonders solche mit voller Reichweite (range), bei denen also jede Folge $\{t_n\}$ als Bildelement auftritt. Eidelheit [2] gelang es schon 1937, die betreffenden Matrizen genau zu charakterisieren. Weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet stammen von Pólya, Petersen, Baker-Thompson und Niethammer (siehe die Literaturangaben in [4]) sowie von Benson [1]. Anwendungen in der Limitierungstheorie ergaben sich vor allem bei den Kreisverfahren (vgl. [5] S. 141—142). Unter anderem bewies man Unvergleichbarkeitssätze: Zu gewissen permanenten zeileninfiniten Verfahren gibt es kein stärkeres permanentes zeilenfinites Verfahren (siehe [3]).

Wir geben hier eine besonders einfache und prägnante Charakterisierung der Matrixtransformationen mit voller Reichweite. Diese Charakterisierung gibt tieferen Einblick in die Struktur des Problemkreises, insbesondere auch bezüglich der erwähnten Unvergleichbarkeitssätze, und erleichtert manche Anwendungen und Verallgemeinerungen. Schon Eidelheit [2] verallgemeinerte sein Problem zu einer Fragestellung über Linearformen in F-Räumen. Wir gehen entsprechend vor. Die nötigen funktionalanalytischen Grundbegriffe findet der Leser in [5]. Weitere Erläuterungen stehen hinter dem folgenden Satz (sowie in [4]).

Satz. Die f_n $(n = 0, 1, \ldots)$ seien stetige Linearformen in einem F-Raum $\mathfrak{F} = [\mathfrak{F}; p_j]$. Dann sind die beiden nachstehenden Aussagen äquivalent.

I. Das Gleichungssystem

$$f_n(\mathfrak{x}) = c_n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

ist für beliebige c_n lösbar.

II. Es gibt ein zu $\{p_j\}$ äquivalentes Halbnormensystem $\{q_j\}$, für welches

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{ord}_q f_n = n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

gilt.

Die Topologie in $\mathfrak{F}$ wird also ursprünglich durch gewisse Halbnormen $p_0, p_1, \ldots$ erzeugt. Äquivalenz der Halbnormsysteme bedeutet, dass die q_j dieselbe Topologie definieren. Anders ausgedrückt: Jedes q_k ist in $[\mathfrak{F}; p_j]$ stetig, kann also durch endlich viele p_j majorisiert werden (analog zu (4)); und Entsprechendes gilt für p_k in $[\mathfrak{F}; q_j]$.

Die Ordnung ord_q wird so definiert: Jede stetige Linearform f in $[\mathfrak{F}; q_j]$ genügt einer Abschätzung der Gestalt

$$\text{(4)} \qquad |f(x)| \leq M(q_0(x) + \ldots + q_m(x)) \qquad (x \in \mathfrak{F}) .$$

Das kleinste m, für das eine solche Abschätzung besteht, nennen wir die Ordnung von f bezüglich der q_j, wobei wir für die triviale Linearform eine Sonderregelung treffen:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{ord} \mathfrak{f} = \operatorname{Min} m \; (\mathfrak{f} \neq 0); \qquad \operatorname{ord} \mathfrak{f} = -1 \qquad (\mathfrak{f} = 0) .$$

Beweis des Satzes.

a) Aus I folgt II: Wir beginnen mit einer Vorbetrachtung. Aus den f_n bilden wir eine beliebige Folge g_n des Typs

$$\text{(6)} \qquad g_n = c_{n0} f_0 + \ldots + c_{nn} f_n \qquad (\text{mit } c_{nn} \neq 0) .$$

Auch die g_n besitzen dann die in I genannte Eigenschaft. Daher gilt

$$\text{(7)} \qquad -1 < \operatorname{ord}_p g_n \; (n = 0, 1, \ldots) , \qquad \operatorname{ord}_p g_n \to \infty \qquad (n \to \infty) .$$

Andernfalls wären nämlich gewisse g_n Null oder einer Wachstumsbedingung unterworfen (vgl. [4] S. 3). Also gibt es ganze Zahlen l_n mit

$$\text{(8)} \qquad -1 < l_n \leq \operatorname{ord}_p g_n \quad (n = 0, 1, \ldots) \qquad \text{und} \qquad l_n \uparrow \infty \quad (n \to \infty)$$

(unabhängig von der Wahl der g_n in (6): man betrachte für jedes n ein g_n minimaler Ordnung). Durch evtl. Verkleinerung erreichen wir

$$\text{(9)} \qquad l_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad l_{n+1} \leq l_n + 1 ,$$

so dass die l_n alle Zahlen 0, 1, ... durchlaufen.

Nun setzen wir

$$\text{(10)} \qquad q_n(x) = |f_n(x)| + p_{k_n}(x) \qquad (\text{mit } k_n = l_{n+1} - 1;\; p_{-1} = 0) .$$

Wegen der Stetigkeit der f_n und der Eigenschaft (9) sind die Halbnormsysteme p_j und q_j äquivalent. Weiter ist offenbar $\mathrm{ord}_q f_n \leqq n$ für alle n. Tatsächlich gilt sogar $\mathrm{ord}_q f_n = n$, wie der nachstehende Widerspruchsschluss zeigt. Für ein bestimmtes n sei $\mathrm{ord}_q f_n < n$. Dann besteht eine Zerlegung (vgl. [5] S. 25)

$$(11) \qquad f_n = c_{n0} f_0 + \ldots + c_{n,n-1} f_{n-1} + h \text{ mit } \mathrm{ord}_p h \leqslant k_{n-1} = l_n - 1 .$$

Bringt man nun die f_k auf die linke Seite, so erhält man ein g_n, das eine p-Ordnung $< l_n$ besitzt und damit (8) verletzt.

b) Aus II folgt I: Die Methode aus [4] S. 3 führt zum Ziel (Zurückführung auf Matrizen mit überwiegenden Hauptdiagonalelementen).

LITERATUR

[1] BENSON, D. C., Unimodular solutions of infinite systems of linear equations. *Pacific J. Math.*, 15, 1-11 (1965).

[2] EIDELHEIT, M., Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. II. *Stud. Math.*, 7, 150-154 (1937).

[3] MEYER-KÖNIG, W. u. K. ZELLER, Vergleich des Taylorschen Summierungsverfahrens mit zeilenfiniten Verfahren. Erscheint im *Ananda-Rau Memorial Volume.*

[4] NIETHAMMER, W. u. K. ZELLER, Unendliche Gleichungssysteme mit beliebiger rechter Seite. *Math. Zeitschr.*, 96, 1-6 (1957).

[5] ZELLER, K., *Theorie der Limitierungsverfahren.* Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

(Reçu le 28 Mai 1968)

Prof. W. Meyer-König
Gotenstr. 4
7022 Leinfelden

Prof. K. Zeller
Mathematisches Institut
Universität Tübingen.

vide-leer-empty