Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APERÇU SUR LA NOTION DE QUASI-COMPOSANTE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Autor: KURATOWSKI, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43219

APERÇU SUR LA NOTION DE QUASI-COMPOSANTE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE [1])

K. KURATOWSKI

A la mémoire de J. Karamata

§ 1. *Topologie-quotient.* Rappelons quelques notions et théorèmes dont nous allons nous servir dans la suite (comp. [1], p. 42, et [5], vol. I, § 19).

Soit $x \sim y$ une *relation d'équivalence* définie pour les éléments d'un espace X. Cette relation induit une décomposition de X en ensembles disjoints qui s'obtient en rangeant dans un même ensemble deux éléments x et y lorsque $x \sim y$ et dans ce cas seulement. La famille de tous ces ensembles (nommés *classes d'équivalence*) est dite *espace-quotient* et est désignée $X/\sim$. Soit $P(x)$ le membre de $X/\sim$ qui contient x; c'est-à-dire $x \in P(x) \in (X/\sim)$. L'application $P: X \to (X/\sim)$ est nommée *projection* de X sur $X/\sim$.

L'espace X étant supposé topologique, on munit $X/\sim$ d'une structure topologique, nommée *topologie-quotient*, en convenant qu'un sous-ensemble $\mathbf{E}$ de $X/\sim$ est ouvert dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque l'union des ensembles-éléments de $\mathbf{E}$ est un sous-ensemble ouvert de X; ou bien, ce qui revient au même: $\mathbf{E}$ est fermé dans $X/\sim$ lorsque l'union de ses éléments est fermée dans X.

Evidemment, *l'application* P *est continue.* Plus encore, si $G \subset X$ est union de membres de $X/\sim$, G est ouvert (fermé) lorsque $P(G)$ est ouvert (fermé) et dans ce cas seulement.

La relation $x \sim y$ est dite *fermée* lorsque l'ensemble de couples $\langle x, y \rangle$ tels que $x \sim y$ est fermé dans le produit $X \times X$. On démontre le théorème suivant (cf. [5], vol. I, p. 140).

Théorème 1. *Si l'espace-quotient* $\mathrm{X}/\sim$ *est un espace de Hausdorff* (autrement dit, est un espace *séparé*), *la relation* $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$ *est fermée.*

---

[1]) Cette note contient les principaux résultats présentés dans ma conférence tenue le 11 mai 1967 à l'Université de Genève.

J'y ai réuni quelques théorèmes et exemples nouveaux en les complétant des résultats connus qui m'ont paru intéressants au point de vue de leur généralité ou de leurs applications.

Théorème 2. *Etant donné deux relations d'équivalence* $\sim$ *et* $\approx$ *dont la première implique la deuxième (en symbole* $\sim \subset \approx$, *c'est-à-dire que* $x \sim y \Rightarrow x \approx y$*), l'espace-quotient* $X/\approx$ *est une image continue de* $X/\sim$.

Plus précisément, en faisant correspondre à $A \in (X/\sim)$ *l'ensemble* $B(A) \in (X/\approx)$ *qui contient* A, *l'application* $B: (X/\sim) \to (X/\approx)$ *est continue.*

Soit, en effet, $\mathbf{E} \subset X/\approx$. On constate aussitôt que l'union des ensembles-éléments de $B^{-1}(\mathbf{E})$ est identique à celle des ensembles-éléments de $\mathbf{E}$, et la dernière est ouverte dans X dès que $\mathbf{E}$ est ouvert dans $X/\approx$. Il en résulte que $B^{-1}(\mathbf{E})$ est ouvert dans $X/\sim$.

§ 2. *Connexité. Composantes.* Rappelons qu'un espace topologique est dit *connexe* lorsqu'il n'admet pas de décomposition en deux ensembles fermés, non vides et disjoints.

Par conséquent, un sous-ensemble d'un espace topologique est connexe lorsqu'il n'admet pas de décomposition en deux ensembles non vides A et B tels que

$$\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$$

($\bar{A}$ désignant la fermeture de A).

Convenons que dorénavant $x \sim y$ veut dire que x et y se laissent unir par un sous-ensemble connexe de l'espace X. Bien entendu, la relation $x \sim y$, ainsi définie, est une relation d'équivalence et les membres de l'espace-quotient $X/\sim$, nommés *composantes* de X, sont les sous-ensembles maximaux connexes de X. Autrement dit, la composante de x, désignée comme auparavant $P(x)$, est l'union de tous les sous-ensembles connexes de X qui contiennent x.

Le problème s'impose de reconnaître quelles sont les propriétés de l'espace X qui se conservent par le passage à l'espace-quotient $X/\sim$?

La propriété d'être un *espace* T_1 se conserve évidemment puisque les composantes sont des ensembles fermés. Cependant, il n'en est rien de la propriété d'être un *espace de Hausdorff*. Pour s'en convaincre, il suffit (comme nous l'avons mentionné dans le § 1) de définir un espace de Hausdorff pour lequel la relation $x \sim y$ n'est pas fermée. Tel est l'espace E suivant (qui est d'ailleurs métrique).

Exemple 1. Soit E un ensemble qui est situé sur le plan $X \times Y$ et se compose des points $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$ et des segments $(0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1/n)$ où $n = 1, 2, \ldots$ En posant $p_n = (0, 1/n)$ et $q_n = (1, 1/n)$, il vient

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p, \lim_{n \to \infty} q_n = q \text{ et } p_n \sim q_n$$

tandis que p non $\sim q$. Cela prouve que la relation $\sim$ n'est pas fermée.

§ 3. *Connexité entre deux points. Quasi-composantes.* L'espace X est dit *connexe entre x et y*, en symbole $x \approx y$, lorsque X ne se laisse pas décomposer en deux ensembles ouverts disjoints G et H tels que $x \in G$ et $y \in H$; ou bien — ce qui revient au même — lorsqu'il n'existe aucun ensemble fermé-ouvert F tel que $x \in F$ et $y \in X - F$.

La relation $x \approx y$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences, c'est-à-dire les membres de l'espace-quotient $X/\approx$ (que nous désignerons aussi $\mathfrak{Q}(X)$), sont nommées *quasi-composantes* de l'espace X. En désignant par Q la projection de X sur $X/\approx$, $Q(x)$ est donc la quasi-composante du point x dans X. On constate facilement que $Q(x)$ *est l'intersection de tous les ensembles fermés-ouverts qui contiennent* x. En outre, *si* F *est fermé-ouvert et* $F \cap Q(x) \neq \emptyset$, *on a* $Q(x) \subset F$.

En ce qui concerne le rapport des relations $\sim$ et $\approx$, on constate aussitôt que si les points x et y se laissent unir par un sous-ensemble connexe de X, l'espace X est connexe entre ces points. En symbole, $\sim \subset \approx$; ou encore: *la composante du point* x *est contenue dans sa quasi-composante.* Cependant elle ne lui est pas nécessairement identique; telle est, dans l'exemple 1, la composante du point p, qui se réduit à ce point, tandis que la quasi-composante de p se compose de deux points, p et q.

L'inclusion $\sim \subset \approx$ implique en vertu du théorème 2 le suivant:

Théorème 3. $X/\approx$ *est image continue de* $X/\sim$.

§ 4. *Espaces totalement discontinus.* Un espace topologique est dit *totalement discontinu* lorsque toutes ses quasi-composantes se réduisent à des points individuels. Autrement dit: lorsque cet espace n'est connexe entre aucun couple de ses points [2]).

Evidemment, *tout espace totalement discontinu est un espace de Hausdorff.*

Théorème 4. *L'espace* $\mathfrak{Q}(X)$ *est totalement discontinu; il est donc un espace de Hausdorff.*

Soient, en effet, P et R deux éléments différents de $\mathfrak{Q}(X)$. Il existe donc un ensemble H fermé-ouvert $\subset X$ tel que $P \subset H$ et $H \cap R = \emptyset$. L'ensemble $Q(H) \subset \mathfrak{Q}(X)$ est donc aussi fermé-ouvert, $P \in Q(H)$ et $R \in Q(X-H)$. Par conséquent, $\mathfrak{Q}(X)$ n'est pas connexe entre P et R.

Remarque 1. Il en résulte (cf. § 1) que *la relation* $x \approx y$ *est fermée.* Cette propriété de la relation $x \approx y$ présente un avantage essentiel envers la relation $x \sim y$.

---

[1]) Ce terme est employé parfois dans un sens différent.

Remarque 2. *L'espace* $\mathfrak{L}$ (X) *n'est pas nécessairement régulier* (même dans le cas où X est métrique). Tel est l'exemple suivant, dû à M. Lelek.

Rappelons d'abord qu'un espace topologique E est dit régulier lorsque, pour tout ensemble fermé F et tout point $p \in E - F$, il existe deux ensembles ouverts et disjoints G et H tels que $p \in G$ et $F \subset H$.

Or, soit X l'espace situé sur le plan euclidien et composé des parties suivantes (qui en sont, en même temps, les quasi-composantes):

1° les segments verticaux $(x_{n,k}, 0 \leqslant y \leqslant 1)$, où

$$x_{n,k} = (1/2^n) + (1/2^k) \quad \text{et} \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = n+1, \quad n+2, \ldots$$

2° de l'ensemble F des points $(1/2^n, 1)$ où $n = 0, 1, \ldots$

3° du point $p = (0, 0)$.

On constate facilement qu'il n'existe aucun couple d'ensembles ouverts, disjoints G et H tels que $p \in G$, $F \subset H$ et qui soient unions des quasi-composantes de X.

Il en résulte que l'espace $\mathfrak{L}(X)$ n'est pas régulier.

Théorème 5. *Si* X *est totalement discontinu, l'espace* $\mathfrak{L}$ (X) *lui est homéomorphe.*

En effet, en attachant à tout $x \in X$ l'ensemble $\{x\}$ composé du point x, on définit l'homéomorphisme demandé.

Remarques. Il en résulte que l'espace $\mathfrak{L}(X)$ n'est pas nécessairement de dimension 0, car il existe des espaces totalement discontinus (complets séparables) de dimension arbitraire (voir [8], p. 311).

Ajoutons que l'on peut introduire dans l'espace $\mathfrak{L}(X)$ une topologie (différente de la topologie-quotient) dans laquelle dim $\mathfrak{L}(X) = 0$, quel que soit X (cf. [2] et [7]). Bien entendu, pour cette topologie, le théorème 5 est en défaut.

§ 5. *Rapports au discontinu de Cantor généralisé.* Désignons par D l'ensemble composé de deux points 0 et 1. Le produit cartésien dénombrable $D^{\aleph_0}$ est bien le discontinu de Cantor, désigné par C. Si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal arbitraire, $D^{\mathfrak{m}}$ est nommé *discontinu de Cantor généralisé.*

Lemme. *Si* X *est totalement discontinu, il existe une fonction continue biunivoque (une injection)* $\mathrm{f}\colon \mathrm{X} \to \mathrm{D}^{\mathfrak{m}}$, *où* $\mathfrak{m}$ *est un nombre cardinal convenablement choisi.*

Plus précisément, si $\{F_t\}$ *où* $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$, *est une famille d'ensembles fermés-ouverts telle qu'à tout couple* $\mathrm{x}_0 \neq \mathrm{x}_1$ *correspond un* $\mathrm{t} \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{F}_t$ *et* $\mathrm{x}_1 \in \mathrm{X} - \mathrm{F}_t$, — *on peut admettre que* $\mathfrak{m}$ *est la puissance de* T.

Posons, en effet, $f_t(x) = 1$ si $x \in F_t$ et $f_t(x) = 0$ dans le cas contraire. F_t étant fermé-ouvert, f_t est une fonction continue pour t fixe. Donc, en assignant à x le point $\{f_t(x)\}$ de D^m, on définit une fonction continue $f: X \to D^m$. Cette fonction (dite fonction caractéristique de la famille $\{F_t\}$) est biunivoque en vertu de la discontinuité totale de X.

Théorème 6. *Pour tout espace* X, *il existe une application continue* $\mathrm{g}: \mathrm{X} \to \mathrm{D}^m$ *telle que les quasi-composantes de* X *coïncident avec les images inverses* $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{y})$ *des points* $\mathrm{y} \in \mathrm{g}(\mathrm{X})$.

On peut, en effet, définir g comme la fonction composée $g = fP$, où P est la projection de X sur $\mathfrak{L}(X)$ et f est la fonction envisagée dans le lemme, en y remplaçant X par $\mathfrak{L}(X)$ (rappelons que $\mathfrak{L}(X)$ est totalement discontinu d'après le théorème 4).

Remarques. Si l'espace totalement discontinu X admet une base dénombrable, il existe — comme on démontre facilement (cf. [4], p. 91, théorème 6 et [5], vol. II, p. 144, théorème 6) — une famille dénombrable $\{F_t\}$ satisfaisant aux conditions du lemme. Par conséquent, l'ensemble D^m peut être remplacé dans ce lemme par le discontinu de Cantor C.

On démontre aussi (*ibid.*, p. 148, théorème 3) que — d'une façon analogue — dans le théorème 6, D^m peut être remplacé par C pourvu que X contienne une base dénombrable.

De plus, *si* X *est métrique séparable, les fonctions* $\mathrm{g}: \mathrm{X} \to \mathrm{C}$ *qui satisfont à la thèse du théorème 6 constituent un ensemble résiduel dans l'espace fonctionnel* C^X.

§ 6. *Autres propriétés des quasi-composantes.* Parmi les autres propriétés importantes des quasi-composantes, citons les suivantes (sans démonstration).

Théorème 7 (de compactification). *Tout espace métrique séparable* X *est contenu topologiquement dans un espace compact* Y *tel que deux quasi-composantes distinctes de* X *sont contenues toujours dans deux quasi-composantes distinctes de* Y.

De plus, en désignant par H *le cube de Hilbert* $\mathrm{I}^{\aleph_0}$, *les homéomorphies* $\mathrm{f}: \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ *telles que l'ensemble* $\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{f}(\mathrm{X})}$ *satisfait aux conditions précitées, constituent un ensemble résiduel dans l'espace fonctionnel* H^X (voir [4], p. 93 ou [5], vol. II, p. 149).

Remarque. La première partie du théorème reste vraie pour les espaces T_1 complètement réguliers. On peut, en effet, remplacer Y par βX (dans le sens de Čech-Stone). Car en supposant que x_0 non $\approx x_1$ et que Z est un ensemble fermé-ouvert dans X tel que $x_0 \in Z$ et $x_1 \in X - Z$, la fonction caractéristique f de Z (relativement à X) se laisse étendre à une fonction continue g aux valeurs 0 et 1, définie sur βX tout entier; de sorte que $x_0 \in g^{-1}(0)$ et $x_1 \in g^{-1}(1)$, donc x_0 non $\approx x_1$ relativement à βX.

Il est toutefois à remarquer que, dans le cas d'espace X métrique séparable (indénombrable), la compactification envisagée dans le théorème 7 n'augmente pas la puissance, tandis que, en général, la puissance de βX est supérieure à celle de X.

Théorème 8. *Si* X *est un espace de Hausdorff compact ou localement connexe, ses quasi-composantes sont connexes. Elles coïncident donc avec les composantes de* X (cf. [3], p. 227).

En outre — dans le premier cas — l'espace $\mathfrak{L}(X)$ *est compact* (voir [5], vol. II, p. 151, théorème 4, et p. 235, théorème 18).

Théorème 9. *Soient* Y *un rétracte de voisinage métrique séparable et* X *un espace métrique. Les quasi-composantes de l'espace fonctionnel* Y^X *coïncident avec ses composantes.*

En outre, l'espace $\mathfrak{L}(Y^X)$ *est complètement régulier. Il est discret si* X *est compact. Enfin, il est homéomorphe à un espace complet séparable de dimension* 0 *si* X *est séparable et localement compact* (voir [5], vol. II, p. 384).

Remarques. L'espace $\mathfrak{L}(Y^X)$ admet des applications importantes dans le cas où X est un sous-ensemble de l'espace euclidien E^n ($n \geqslant 2$) et $Y = E^n - (0)$.

Dans ce cas $\mathfrak{L}(Y^X)$ est un groupe topologique (nommé n-ème *groupe de cohomotopie* si X est compact).

Le cas $n = 2$ est particulièrement simple, car la multiplication des membres du groupe $\mathfrak{L}(Y^X)$ est induite par la multiplication des nombres complexes non nuls.

Les applications du groupe $\mathfrak{L}(Y^X)$ concernent en particulier les problèmes de coupure de la sphère S_n et servent à établir des théorèmes de dualité (vcir [5], vol. II, § 60, VIII-X).

Citons, à titre d'exemple, le théorème de dualité suivant (voir [6]):

Théorème 10. *Soient* $X \subset E^n$, $p, q \in S_n - X$ *et* $P_n = E^n - (0)$. *Pour que les points* p *et* q *appartiennent à la même quasi-composante de* $S_n - X$, *il faut et il suffit que les translations* $x - p$ *et* $x - q$ *appartiennent à la même quasi-composante de* P_n^X; *c'est-à-dire*

$$(p \approx q \textit{ dans } S_n - X) \equiv (x - p \approx x - q \textit{ dans } P_n^X).$$

Comme cas particulier, on obtient le théorème de Borsuk: *pour que l'ensemble* $S_n - X$ *soit connexe, il faut et il suffit que l'espace* P_n^X *le soit.*

OUVRAGES CITÉS

[1] BOURBAKI, N. *Topologie générale*, chap. I, 1961.
[2] DE GROOT, J. *Indag. Mathem.*, 9 (1947), p. 94.
[3] KURATOWSKI, K. *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie.* Monogr. *Ens. Math.*, 15 (1966).
[4] —— *Topologie*, vol. II, 3e éd. Mon. Mat., Varsovie 1961.
[5] —— *Topology*, Academic Press, vol. I (1966), vol. II, sous presse.
[6] —— Un critère de coupure de l'espace euclidien par un sous-ensemble arbitraire. *Math. Zeitschr.*, 72 (1959), p. 88.
[7] LELEK, A. On the Knaster totally disconnected sets. *Bull. Acad. Polon. Sc.*, 15 (1967), p. 81.
[8] MAZURKIEWICZ, S. *Fundam. Math.*, 10 (1927).

(Reçu le 1er mai 1968)

Prof. K. Kuratowski
Vice-président de l'Académie des Sciences
Palais de la culture et des sciences
Varsovie

vide-leer-empty