

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	15 (1969)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	TROIS NOTES SUR LES ENSEMBLES PARFAITS LINÉAIRES
<b>Autor:</b>	Kahane, J.-P.
<b>Kapitel:</b>	II. Une fonction de classe $C^{\infty}$ localement polynomiale
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-43217">https://doi.org/10.5169/seals-43217</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

En particulier,  $F^{gg} \cap F^{gd}$  et  $F^{dd} \cap F^{dg}$  sont d'aires nulles, et il en est de même pour leurs transformées par les affinités horizontales de rapport 4 appliquant respectivement  $F^{gg}$  et  $F^{dd}$  sur  $F$ .

Il suit de là que la partie de  $F$  située au-dessous de la droite  $y = \frac{1}{4}$  est d'aire nulle. Pour presque tout  $\mu$  dans  $[0, \frac{1}{4}]$ , l'ensemble  $(1-\mu)E + \frac{1}{2}\mu E$  est donc de mesure nulle. Autrement dit, pour presque tout  $\lambda$  dans  $[0, \frac{1}{6}]$ ,  $E + \lambda E$  est de mesure nulle. Or, pour tout  $\lambda > 0$  et tout entier  $n > 0$ ,  $E + \lambda E$  est la réunion de  $2^n$  ensembles translatés de  $E + \lambda 4^{-n}E$ . Donc  $E + \lambda E$  est de mesure nulle pour presque tout  $\lambda$  positif, ce qui démontre les propositions 2) et 4).

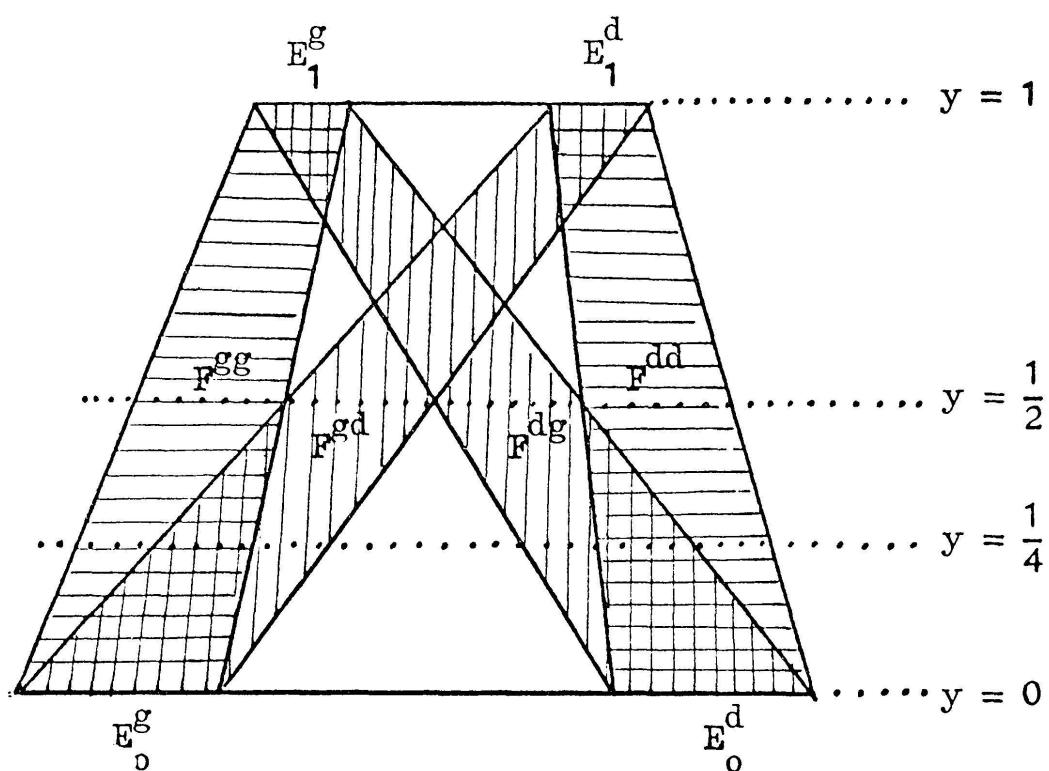


Figure 1

## II. UNE FONCTION DE CLASSE $C^\infty$ LOCALEMENT POLYNOMIALE

Mandelbrojt a indiqué un procédé de construction de fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact, par régularisations successives (cf. [4]). Nous allons constater que cette construction fournit une fonction localement polynomiale sur le complémentaire d'un ensemble parfait symétrique donné. On obtient ainsi sans peine des fonctions de classe  $C^\infty$  et localement polynomiales en dehors d'un ensemble parfait arbitrairement fin; une construction, moins simple, a été donnée par Donoghue [2].

Soit  $r_n$  une suite positive sommable ( $\sum_1^\infty r_n = b_0 < \infty$ ). Notons  $\varphi_n$  la fonction

paire égale à  $\frac{1}{2r_n}$  sur  $[0, r_n]$ , et nulle sur  $[r_n, \infty]$ . Soit  $f_n$  la convolution

$\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n$ . On vérifie que  $f_n$  converge uniformément vers une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  et de support  $[-b_0, b_0]$  quand  $n \rightarrow \infty$  [4].

Posons  $b_n = r_{n+1} + r_{n+2} + \dots$  et supposons maintenant  $r_n > b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ). L'ensemble des points  $\sum_1^\infty \varepsilon_n r_n$  ( $\varepsilon_n = \pm 1$ ) est un ensemble parfait symétrique que nous noterons  $E$ . A une translation près, tout ensemble parfait symétrique est de cette forme, pour un choix convenable de la suite  $r_n$ . Pour construire  $E$ , on peut procéder par étapes: on part du segment  $[-b_0, b_0]$  (blanc) et on ôte en son centre un intervalle  $[-r_1 + b_1, r_1 - b_1]$  (noir); il reste deux segments blancs  $[\varepsilon_1 r_1 - b_1, \varepsilon_1 r_1 + b_1]$ , et on répète l'opération, de sorte qu'à la  $n$ -ième étape l'ensemble restant,  $E_n$ , soit la réunion des  $2^n$  segments blancs  $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots + \varepsilon_n r_n - b_n, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots + \varepsilon_n r_n + b_n]$ .  $E$  est l'intersection des  $E_n$ . L'ensemble  $E_n \setminus E_{n+1}$  est l'ensemble noirci à la  $n$ -ième étape.

Observons que si  $f_n$  est un polynôme de degré  $p$  sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  de longueur  $> 2r_{n+1}$ , il en est de même de  $f_{n+1} = f_n * \varphi_{n+1}$  sur l'intervalle  $[\alpha + r_{n+1}, \beta - r_{n+1}]$ . Donc, si  $f_n$  est un polynôme de degré  $p$  sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  de longueur  $> 2b_n$ , il en est de même de  $f$  sur l'intervalle  $[\alpha + b_n, \beta - b_n]$ . Or  $f_1$  est constant sur l'intervalle  $[-r_1, r_1]$ ,  $f_2$  est linéaire sur chacun des segments  $[\varepsilon_1 r_1 - r_2, \varepsilon_1 r_1 + r_2]$ ,  $f_3$  est parabolique sur chacun des segments  $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 - r_3, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + r_3]$  et ainsi de suite. Il s'ensuit que sur  $E_n \setminus E_{n+1}$  (réunion des intervalles noircis à la  $n$ -ième étape)  $f$  est localement un polynôme de degré  $n-1$ . Donc  $f$  est localement polynomiale en dehors de  $E$ .

### III. UNE MESURE SINGULIÈRE ET PRESQUE LISSE

Zygmund a appelé fonctions lisses les fonctions  $f$  telles que

$$\omega_2(f, t) = \sup_x \sup_{|h| \leq t} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| = o(t) \quad (t \rightarrow 0).$$

Il a aussi introduit la classe  $A^*$  des fonctions  $f$  pour lesquelles

$$\omega_2(f, t) = 0(t) \quad (t \rightarrow 0);$$