

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1969)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TROIS NOTES SUR LES ENSEMBLES PARFAITS LINÉAIRES  
**Autor:** Kahane, J.-P.  
**Kapitel:** I. Segments joignant deux ensembles de Cantor  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43217>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# TROIS NOTES SUR LES ENSEMBLES PARFAITS LINÉAIRES

J.-P. KAHANE

*A la mémoire de J. Karamata*

Les trois notes qui suivent ont pour seul trait commun de traiter de problèmes élémentaires mettant en jeu des ensembles parfaits totalement discontinus sur la droite.

## I. SEGMENTS JOIGNANT DEUX ENSEMBLES DE CANTOR

Besicovitch, puis Schoenberg, ont construit des ensembles plans d'aire nulle et contenant un segment de longueur unité parallèle à n'importe quelle direction (cf. [1]). Nous allons donner une variante, très simple, de leur construction, fondée sur l'étude des ensembles  $E + \lambda E$ , où  $E$  est un ensemble du type de Cantor.

Soit  $E$  l'ensemble parfait symétrique à rapport de dissection  $\frac{1}{4}$ , construit sur le segment  $[0, 1]$ , c'est-à-dire l'ensemble des points

$$x = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{4^n}, \quad \varepsilon_n = 0 \text{ ou } 1.$$

Dans le plan cartésien, où les coordonnées sont notées  $x, y$ , considérons les ensembles

$$E_0 : y = 0, \quad x \in E$$

$$E_1 : y = 1, \quad 2(x - \xi) \in E$$

( $\xi$  réel donné). Soit  $F$  la réunion des segments du plan qui s'appuient sur  $E_0$  et  $E_1$  (c'est-à-dire qui ont une extrémité sur  $E_0$  et l'autre sur  $E_1$ ). On désigne par  $I_0$  et  $I_1$  les segments supports de  $E_0$  et  $E_1$  respectivement.

Nous allons établir que

1)  $F$  contient un translate au moins (et deux au plus) de tout segment qui s'appuie sur  $I_0$  et  $I_1$ ;

2)  $F$  est un compact d'aire nulle.

Ces propositions ne sont rien d'autre — nous allons le vérifier rapidement — que l'expression géométrique des suivantes :

3) tout nombre entre 0 et  $\frac{3}{2}$  s'écrit au moins d'une façon, et au plus de deux façons, sous la forme  $x + \frac{x'}{2}$ ,  $x \in E$ ,  $x' \in E$ ; en particulier,  $E + \frac{1}{2}E = [0, \frac{3}{2}]$ ;

4) pour presque tout  $\lambda$ , l'ensemble  $E + \lambda E$  est de mesure nulle (désormais, mesure = mesure linéaire).

La proposition 3) est à peu près évidente: tout nombre entre 0 et  $\frac{3}{2}$  s'écrit, au moins d'une façon et au plus de deux façons, sous la forme

$$\frac{3}{2} \sum_1^{\infty} \frac{2\varepsilon_n + \varepsilon'_n}{4^n}, \quad \varepsilon_n = 0 \text{ ou } 1, \quad \varepsilon'_n = 0 \text{ ou } 1.$$

La proposition 1) ne dépend pas du choix de  $\xi$ . Or, pour  $\xi = -\frac{1}{2}$ ,  $2(x - \xi) \in E \Leftrightarrow -2x \in E$ . Dans ce cas, les longueurs des projections horizontales des segments qui s'appuient sur  $E_0$  et  $E_1$  sont les nombres  $x + \frac{x'}{2}$  ( $x \in E$ ,  $x' \in E$ ), c'est-à-dire, d'après la proposition 3), tous les nombres entre 0 et  $\frac{3}{2}$ . La proposition 1) en résulte, dans le cas  $\xi = -\frac{1}{2}$ , donc dans le cas général.

Les points de  $F$  d'ordonnée  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) ont pour abscisses

$$(1 - \mu)x + \mu x' \quad (x \in E, 2(x' - \xi) \in E).$$

Il revient au même de dire que  $F$  est d'aire nulle ou de dire que, pour presque tout  $\mu$  dans  $[0, 1]$ , l'ensemble

$$(1 - \mu)E + \frac{1}{2}\mu E$$

est de mesure nulle. Les propositions 2) et 4) sont donc équivalentes.

Désignons par  $E_i^g$  et  $E_i^d$  respectivement la moitié gauche et la moitié droite de  $E_i$  ( $i=0$  ou  $1$ ), et désignons par  $F^{\alpha\beta}$  ( $\alpha=g$  ou  $d$ ,  $\beta=g$  ou  $d$ ) la réunion des segments qui s'appuient sur  $E_0^\alpha$  et  $E_1^\beta$ .  $F$  est la réunion des quatre ensembles  $F^{\alpha\beta}$  (figure 1).

Or chaque  $F^{\alpha\beta}$  s'obtient à partir de  $F$  par une affinité horizontale de rapport  $\frac{1}{4}$  (c'est-à-dire une transformation  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  de la forme

$$x' = x_0 + \frac{x}{4} + \rho y$$

$$y' = y \quad ).$$

Les aires des  $F^{\alpha\beta}$  sont donc toutes égales au quart de celle de  $F$ . Les parties communes à deux  $F^{\alpha\beta}$  sont donc d'aire nulle.

En particulier,  $F^{gg} \cap F^{gd}$  et  $F^{dd} \cap F^{dg}$  sont d'aires nulles, et il en est de même pour leurs transformées par les affinités horizontales de rapport 4 appliquant respectivement  $F^{gg}$  et  $F^{dd}$  sur  $F$ .

Il suit de là que la partie de  $F$  située au-dessous de la droite  $y = \frac{1}{4}$  est d'aire nulle. Pour presque tout  $\mu$  dans  $[0, \frac{1}{4}]$ , l'ensemble  $(1-\mu)E + \frac{1}{2}\mu E$  est donc de mesure nulle. Autrement dit, pour presque tout  $\lambda$  dans  $[0, \frac{1}{6}]$ ,  $E + \lambda E$  est de mesure nulle. Or, pour tout  $\lambda > 0$  et tout entier  $n > 0$ ,  $E + \lambda E$  est la réunion de  $2^n$  ensembles translatés de  $E + \lambda 4^{-n}E$ . Donc  $E + \lambda E$  est de mesure nulle pour presque tout  $\lambda$  positif, ce qui démontre les propositions 2) et 4).

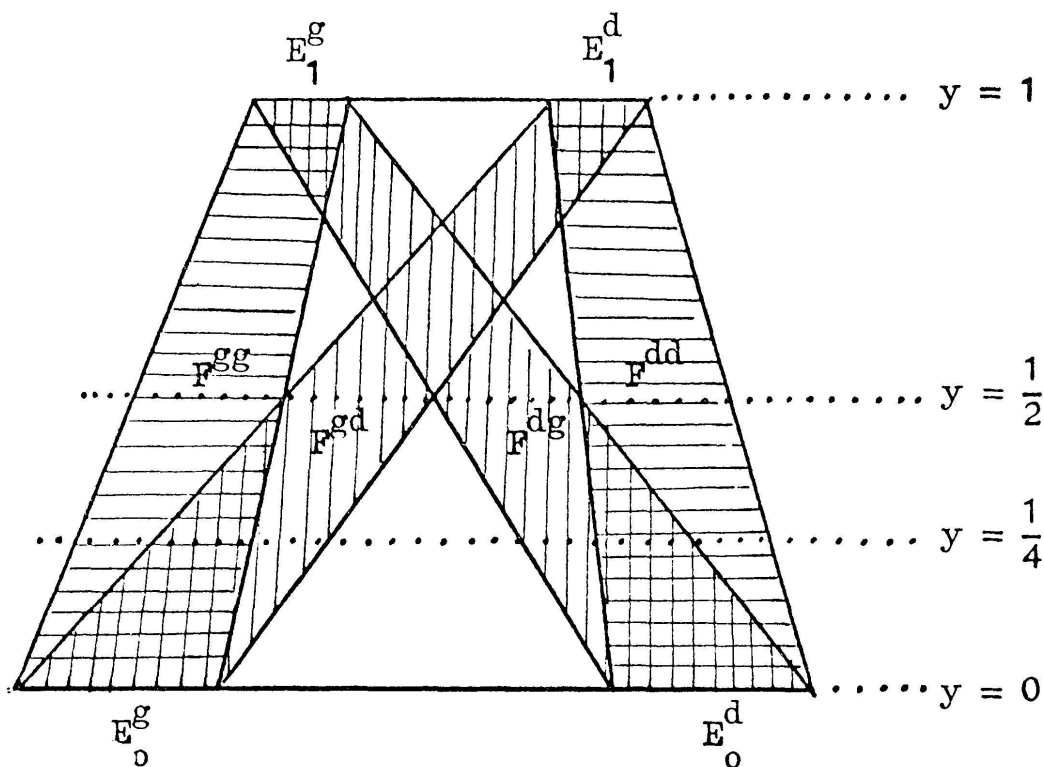


Figure 1

## II. UNE FONCTION DE CLASSE $C^\infty$ LOCALEMENT POLYNOMIALE

Mandelbrojt a indiqué un procédé de construction de fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact, par régularisations successives (cf. [4]). Nous allons constater que cette construction fournit une fonction localement polynomiale sur le complémentaire d'un ensemble parfait symétrique donné. On obtient ainsi sans peine des fonctions de classe  $C^\infty$  et localement polynomiales en dehors d'un ensemble parfait arbitrairement fin; une construction, moins simple, a été donnée par Donoghue [2].