

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1969)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UN THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES APPROXIMATIONS  
DIOPHANTIENNES  
**Autor:** Jarnik, Vojtch  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43215>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UN THÉORÈME D'EXISTENCE POUR LES APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES

Vojtěch JARNÍK

*A la mémoire de J. Karamata*

Tous les nombres de cette Note sont réels. Nous allons dire qu'un système de nombres  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  est un système propre, si l'égalité

$$c_0 + c_1 \lambda_1 + \dots + c_k \lambda_k = 0 \quad (c_0, c_1, \dots, c_k \text{ entiers})$$

entraîne  $c_0 = c_1 = \dots = c_k = 0$ . Soit

$$(1) \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11}, \dots, \theta_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ \theta_{m1}, \dots, \theta_{mn} \end{pmatrix} \quad (m \geq 1, n \geq 1)$$

une matrice de  $mn$  nombres

$$(2) \quad \{ \theta_{ij} \}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Soit  $\varphi(x)$  une fonction positive pour  $x \geq A$  ( $A \geq 1$ ). Nous allons dire <sup>1)</sup> que  $\Theta$  admet l'approximation  $\varphi(x)$ , si les inégalités

$$(3) \quad \begin{cases} |\theta_{i1} x_1 + \dots + \theta_{in} x_n - y_i| < \varphi(x) & (i = 1, \dots, m), \\ x = \text{Max}(|x_1|, \dots, |x_n|) > 0 \end{cases}$$

possèdent une infinité de solutions en nombres entiers

$$(4) \quad x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m.$$

On sait que chaque matrice (1) admet l'approximation  $x^{-n/m}$ ; d'autre part, il existe pour chaque  $m, n$  des matrices (1) qui n'admettent pas l'approximation  $cx^{-n/m}$ ,  $c > 0$  étant une constante convenable (pour  $n = 1$ , voir p. ex. Perron [2]; pour  $n$  quelconque, voir p. ex. Cassels [3], pp. 15-16; pour l'existence d'une infinité non dénombrable de telles matrices dans le cas  $n = 1$ , voir p. ex. Davenport [4], Cassels [5]). Si  $\varphi(x) > 0$ ,  $\lambda(x) > 0$

<sup>1)</sup> Cette terminologie diffère de celle que j'employais dans le cas  $n = 1$ , par exemple dans [1].

$(x \geq A \geq 1)$  sont des fonctions satisfaisant à quelques conditions assez naturelles,  $\lambda(x) \rightarrow 0$  pour  $x \rightarrow +\infty$ , si l'intégrale

$$(5) \quad \int_A^{+\infty} x^{n-1} (\varphi(x))^m dx$$

est divergente et l'intégrale

$$(6) \quad \int_A^{+\infty} x^{n-1} (\varphi(x) \lambda(x))^m dx$$

est convergente, alors pour presque tous les systèmes (2) on a l'énoncé suivant (« presque tous » au sens de la mesure de Lebesgue): La matrice (1) admet  $\varphi(x)$ , mais n'admet pas  $\varphi(x) \lambda(x)$ . C'est, pour  $n = 1$ , une conséquence immédiate d'un théorème fondamental de Chinčîn [6]; pour  $n$  quelconque, voir par exemple Grošev [7]. Nous allons nous occuper en particulier du cas où l'intégrale (5) est convergente et nous allons démontrer le théorème suivant:

*Théorème A.* Soit  $m \geq 1, n \geq 1, A \geq 1, \varepsilon > 0$ . Soit  $\varphi(x)$  une fonction continue, décroissante et positive pour  $x \geq A$ . Supposons que les fonctions

$$(7) \quad \varphi(x) \cdot x^{1/k} (k = 1, \dots, m), \quad \varphi(x) \cdot x^{1+\varepsilon}, \quad \varphi(x) \cdot x^{(n-1)/m}$$

soient monotones et que (5) soit convergente. Soit, enfin,  $\lambda(x)$  une fonction continue, positive et monotone pour  $x \geq A$ ,  $\lambda(x) \rightarrow 0$  pour  $x \rightarrow +\infty$ . Alors il existe un système propre

$$(8) \quad \{ \theta_{ij} \} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

tel que la matrice (1) admette l'approximation  $\varphi(x)$ , mais n'admette pas l'approximation  $\varphi(x) \lambda(x)$ .

Ce théorème est connu pour  $n = 1$ , c'est-à-dire pour les « approximations simultanées ».

$$(9) \quad | \theta_{i1} q - p_i | < \varphi(q), \quad q > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

La démonstration en est assez compliquée. Dans [1], j'ai démontré un théorème métrique (Sätze 3 et 4), utilisant la mesure de Hausdorff, d'où l'on peut déduire sans difficulté un théorème d'existence (Satz 5) qui présente une certaine analogie avec le cas  $n = 1$  du théorème A. Plus tard, K. Černý [8], utilisant la mesure de Lebesgue, a donné une démonstration

plus simple — mais néanmoins assez compliquée (18 pages) — d'un théorème métrique (Théorème 1 dans [8]), dont il a aisément déduit son théorème 2, qui est identique au cas  $n = 1$  de notre théorème A. Le but de cette note est de montrer que le cas  $n > 1$  du théorème A peut être aisément déduit du cas  $n = 1$ , pour lequel le théorème est déjà connu.

Remarquons que les conditions de monotonie pour les fonctions (7) ne sont pas trop gênantes, car il est naturel de n'examiner que des fonctions  $\varphi$  d'allure assez régulière. Remarquons encore qu'il n'est pas nécessaire que toutes les fonctions (7) soient du même type; il peut se faire, par exemple, que  $\varphi(x) \cdot x$  soit croissante,  $\varphi(x) \cdot x^{1/2}$  décroissante, etc.

### *Démonstration du théorème A pour $n > 1$*

La convergence de (5) entraîne celle de

$$\int_A^{+\infty} (\varphi(x))^m dx.$$

On peut donc appliquer le cas  $n = 1$  du théorème A: Il existe un système propre

$$(10) \quad \{ \theta_{i1} \}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

tel que les inégalités (9) possèdent une infinité de solutions en nombres entiers  $q, p_1, \dots, p_m$ , mais les inégalités analogues avec  $\varphi(q) \lambda(q)$  au lieu de  $\varphi(q)$  n'en possèdent qu'un nombre fini au plus. Choisissons un tel système (10) et notons deux faits évidents:

I. Si l'on ajoute à notre système (10) un système quelconque de  $m(n-1)$  nombres

$$(11) \quad \{ \theta_{ij} \} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 2, 3, \dots, n)$$

on obtient un système (8) tel que la matrice (1) admet l'approximation  $\varphi(x)$ .

II. (10) étant un système propre, alors, pour presque tous les systèmes (11), le système (8) est un système propre.

Donc, pour achever la démonstration, il suffit de démontrer le Lemme suivant:

*Lemme.* Soit  $m \geq 1, n > 1, A \geq 1$ ; soit (10) un système de  $m$  nombres donné. Soit  $\varphi(x)$  une fonction continue et positive,  $x^{n-1}(\varphi(x))^m$  soit décroissante pour  $x \geq A$ ; l'intégrale (5) soit convergente. Désignons par  $M$  l'ensemble de tous les points (11) de l'espace à  $m(n-1)$  dimensions, pour lesquels le système d'inégalités

$$(12) \quad \begin{cases} |\theta_{i1}x_1 + \theta_{i2}x_2 + \dots + \theta_{in}x_n - y_i| < \varphi(x) & (i = 1, 2, \dots, m), \\ x = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) > 0, \\ \xi = \text{Max}(|x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|) > 0 \end{cases}$$

possède une infinité de solutions en nombres entiers (4). Alors  $\mu(M) = 0$  ( $\mu(M)$  est la mesure de  $M$ ).

*Démonstration.* Soit  $K$  le cube  $0 \leq \theta_{ij} < 1$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=2, 3, \dots, n$ ),  $N = M \cap K$ . Il suffit évidemment de montrer que  $\mu(N) = 0$ . Les nombres (4) (entiers) étant donnés, soit

$$(13) \quad E(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

l'ensemble de tous les points (11) de  $K$ , pour lesquels (12) est satisfaite. Evidemment

$$\mu(E(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)) \leq \left(\frac{2}{\xi} \varphi(x)\right)^m.$$

Désignons par  $F(x_1, \xi)$  la réunion de tous les ensembles (13) pour lesquels  $x_1$  et  $\xi = \text{Max}(|x_2|, \dots, |x_n|) > 0$  ont des valeurs données. Désignons par  $c$  des nombres positifs ne dépendant que de  $m, n$  et des nombres (10) donnés. Si, par exemple,  $|x_p| = \xi$  ( $p > 1$ ), on a pour chaque  $x_j$  ( $2 \leq j \leq n, j \neq p$ )  $2\xi + 1$  possibilités; en outre, si  $x_1, \dots, x_n$  sont donnés et si (13) doit être non vide, on a pour chaque  $y_i$  ( $i=1, \dots, m$ )  $c\xi$  possibilités au plus. Donc <sup>1)</sup>

$$\mu(F(x_1, \xi)) \leq c\xi^{m+n-2} \left(\frac{2}{\xi} \varphi(x)\right)^m,$$

où  $x = \text{Max}(|x_1|, \xi)$  ( $\xi \geq 1$ ). On obtient enfin

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, \xi} \mu(F(x_1, \xi)) &\leq \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{|x_1| \leq \xi} c\xi^{n-2} (\varphi(\xi))^m + \\ &+ \sum_{|x_1|=1}^{\infty} \sum_{0 < \xi < |x_1|} c\xi^{n-2} (\varphi(|x_1|))^m \leq \\ &\leq c \sum_{t=1}^{\infty} t^{n-1} (\varphi(t))^m < +\infty. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Pour  $1 \leq x < A$  on peut compléter la définition de  $\varphi(x) > 0$  d'une manière arbitraire.

Donc l'ensemble de tous les points (11) qui sont contenus dans une infinité d'ensembles  $F(x_1, \xi)$  est de mesure zéro.

*Remarque.* Si  $\varphi(x)$  est assez petite, on peut démontrer le théorème suivant, plus précis que le théorème A:

*Théorème B.* Soit  $\varphi(x)$  une fonction positive et continue pour  $x \geq A \geq 1$ ,  $x\varphi(x)$  monotone,  $x\varphi(x) \rightarrow 0$  pour  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x^{(n-1)/m} \cdot \varphi(x)$  monotone, et l'intégrale (5) soit convergente. Alors il existe un système (8) propre tel que la matrice (1) admette l'approximation  $\varphi(x)$ , mais n'admette aucune approximation  $k\varphi(x)$  ( $0 < k < 1$ ).

Pour  $n = 1$ , ce théorème est connu (voir [1], Satz 6) et sa démonstration est, contrairement à celle du théorème A, assez facile (pour  $n=1$ , on n'a pas même besoin de la convergence de (5)). La démonstration pour  $n > 1$  s'achève comme plus haut.

Remarquons que pour  $n \geq m$  les suppositions du théorème A entraînent les suppositions du théorème B. Donc le théorème A donne des résultats qui ne sont pas contenus dans le théorème B seulement dans le cas  $n < m$ . Remarquons enfin que les théorèmes A, B ne donnent aucun résultat dans le cas où les intégrales (5), (6) divergent et  $\varphi(x) = o(x^{-n/m})$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] JARNÍK, V., Über die simultanen diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, 33 (1931), 505-543.
- [2] PERRON, O., Über diophantische Approximationen. *Math. Annalen*, 83 (1921), 77-84.
- [3] CASSELS, J. W., *An introduction to diophantine approximation*. Cambridge Tracts No. 45 (1957, reprinted 1965).
- [4] DAVENPORT, H., Simultaneous diophantine approximation. *Mathematika*, 1 (1954), 51-72.
- [5] CASSELS, J. W., Simultaneous diophantine approximation. *Proc. London Math. Soc.* (3), 5 (1955), 435-448.
- [6] KHINTCHINE, A., Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Math. Zeitschr.*, 24 (1926), 706-714.
- [7] GROŠEV, A., Un théorème sur les systèmes de formes linéaires. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 19 (1938), 151-152.
- [8] ČERNÝ, K., Contribution à la théorie des approximations simultanées. *Acta facultatis rerum naturalium Universitatis Carolinae (Prague)*, 1948, n° 188. Une traduction russe est parue dans *Časopis pro pěstování matematiky*, 2 (77), 1952, 191-220.

(Reçu le 1<sup>er</sup> mai 1968)

**Vide-leer-empty**