

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 15 (1969)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SUR LES CORPS DE CARACTÉRISTIQUE NON NULLE
Autor: Gauthier, Luc
Kapitel: V. Essai de géométrie métrique
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43210>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les points d'inflexion sont obtenus en annulant le terme du second degré

$$\eta = 0$$

mais nous avons déjà exclu l'origine comme point singulier.

La cubique considérée n'admet aucun point d'inflexion véritable. En revanche elle admet un point de rebroussement d'une nature plus subtile que ceux de la géométrie classique : il ne vérifie pas le théorème de Puiseux.

Mais je ne veux pas, dans ce travail qui vise seulement à présenter quelques aspects de la géométrie sur un corps de caractéristique p , entrer dans l'étude, d'ailleurs délicate, des singularités des courbes et variétés algébriques.

f) Sans donner non plus de développement au sujet d'une étude dont je me suis occupé récemment, je voudrais cependant signaler que la géométrie infinitésimale en caractéristique p , dispose actuellement de moyens suffisants pour qu'on puisse analyser complètement la structure d'une variété en un point, et lui associer *un repère projectif mobile* intrinsèquement défini. Je renverrai seulement, sur ce sujet, à deux publications en cours, l'une à Bologne (Luc Gauthier: *Adaptation d'une méthode de Bompiani à la géométrie infinitésimale sur les corps de Galois*, Colloque de géométrie différentielle, fin septembre 1967), l'autre dans le volume jubilaire dédié à M. Lucien Godeaux (Luc Gauthier: *Géométrie projective infinitésimale sur les corps de Galois*).

V. ESSAI DE GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

Lorsqu'on dispose d'une géométrie projective, et par conséquent, en faisant choix d'un hyperplan à l'infini, d'une géométrie affine, il vient naturellement à l'idée d'introduire une forme quadratique définie positive, à laquelle on associera une distance, pour fabriquer une géométrie métrique.

Malheureusement, dans les corps finis l'absence de relation d'ordre permettant de définir le qualificatif « positif » détruit cet espoir.

Cependant, dans l'intention de donner des applications en astronomie, à l'étude des amas d'étoiles, P. Kustaanheimo ¹⁾ et G. Järnefelt ²⁾, ont montré que pour des valeurs particulières, (mais non bornées) de la caractéristique p , il est possible d'extraire de l'espace affine construit sur le corps

¹⁾ Kustaanheimo: *One the fundamental prime of a finite world*. Annales Academiae scientiarum fennicae, 1952.

²⁾ Järnefelt: *Reflections on a finite approximation to euclidean geometry...* Ibidem 1951.

des restes modulo p un domaine (dont le nombre des points pourra, avec p , croître indéfiniment) que l'on peut munir d'une structure métrique euclidienne.

Je voudrais indiquer rapidement ici les idées directrices qui ont fait le succès de cette étude si originale.

On commence par donner du qualificatif « positif » une signification compatible avec la seule structure multiplicative du corps des restes modulo p . On sait que, en se bornant au cas de p impair, et au groupe multiplicatif des restes non nuls, la théorie de la racine carrée conduit à considérer deux classes d'entiers :

a) les restes quadratiques, c'est-à-dire ceux a pour lesquels la congruence

$$x^2 = a \text{ mod. } p$$

admet des solutions.

b) les non-restes quadratiques, c'est-à-dire ceux b pour lesquels la congruence

$$x^2 = b \text{ mod } p$$

n'a pas de solution.

Chaque classe contient le même nombre d'éléments.

Le produit de deux restes est un reste. Le produit d'un reste et d'un non-reste est un non-reste. Le produit de deux non-restes est un reste. L'application qui, à tout élément non nul du corps, fait correspondre le symbole $+$ si c'est un reste, et le symbole $-$ si c'est un non-reste, a donc les qualités multiplicatives de la « règle des signes ».

Il faut ensuite transporter cette qualification, par translation, dans le domaine, de façon à pouvoir dire que l'inégalité

$$x \succ y$$

signifie que $x - y$ est un reste quadratique, modulo p . Comme la somme de deux restes n'est pas toujours un reste, c'est ce point qui introduit les limitations du domaine de validité. Kustaanheimo a montré que si ϖ est le produit des k premiers nombres premiers impairs, en choisissant

$$p = -1 \text{ mod } 8\varpi$$

il existe une « chaîne euclidienne »

$$-M, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +M$$

de $2M + 1$ entiers tels que, modulo p , tous les nombres $1, 2, \dots, M$ soient des restes quadratiques et tous les nombres $-1, -2, \dots, -M$ soient des non-restes. Le pavé affine formé des points dont les coordonnées sont prises dans une telle chaîne euclidienne est alors susceptible d'être muni de la métrique dans laquelle la distance est donnée par la règle de Pythagore.

Je renverrai, pour le développement de cette question, aux auteurs eux-mêmes.

(Achevé à Novosibirsk le 9 février 1968)

L. Gauthier
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

Vide-leer-empty