Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SUR LES CORPS DE CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Autor: Gauthier, Luc

Kapitel: V. Essai de géométrie métrique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43210

Les points d'inflexion sont obtenus en annulant le terme du second degré

$$\eta = 0$$

mais nous avons déjà exclu l'origine comme point singulier.

La cubique considérée n'admet aucun point d'inflexion véritable. En revanche elle admet un point de rebroussement d'une nature plus subtile que ceux de la géométrie classique : il ne vérifie pas le théorème de Puiseux.

Mais je ne veux pas, dans ce travail qui vise seulement à présenter quelques aspects de la géométrie sur un corps de caractéristique p, entrer dans l'étude, d'ailleurs délicate, des singularités des courbes et variétés algébriques.

f) Sans donner non plus de développement au sujet d'une étude dont je me suis occupé récemment, je voudrais cependant signaler que la géométrie infinitésimale en caractéristique p, dispose actuellement de moyens suffisants pour qu'on puisse analyser complètement la structure d'une variété en un point, et lui associer *un repère projectif mobile* intrinsèquement défini. Je renverrai seulement, sur ce sujet, à deux publications en cours, l'une à Bologne (Luc Gauthier: *Adaptation d'une méthode de Bompiani à la géométrie infinitésimale sur les corps de Galois,* Colloque de géométrie différentielle, fin septembre 1967), l'autre dans le volume jubilaire dédié à M. Lucien Godeaux (Luc Gauthier: *Géométrie projective infinitésimale sur les corps de Galois).*

V. Essai de géométrie métrique

Lorsqu'on dispose d'une géométrie projective, et par conséquent, en faisant choix d'un hyperplan à l'infini, d'une géométrie affine, il vient naturellement à l'idée d'introduire une forme quadratique définie positive, à laquelle on associera une distance, pour fabriquer une géométrie métrique.

Malheureusement, dans les corps finis l'absence de relation d'ordre permettant de définir le qualificatif « positif » détruit cet espoir.

Cependant, dans l'intention de donner des applications en astronomie, à l'étude des amas d'étoiles, P. Kustaanheimo [1]) et G. Järnefelt [2]), ont montré que pour des valeurs particulières, (mais non bornées) de la caractéristique p, il est possible d'extraire de l'espace affine construit sur le corps

1) Kustaanheimo: *One the fundamental prime of a finite world.* Annales Academiae scientiarum fennicae, 1952.

2) Järnefelt: *Reflections on a finite approximation to euclidean geometry...* Ibidem 1951.

des restes modulo p un domaine (dont le nombre des points pourra, avec p, croître indéfiniment) que l'on peut munir d'une structure métrique euclidienne.

Je voudrais indiquer rapidement ici les idées directrices qui ont fait le succès de cette étude si originale.

On commence par donner du qualificatif « positif » une signification compatible avec la seule structure multiplicative du corps des restes modulo p. On sait que, en se bornant au cas de p impair, et au groupe multiplicatif des restes non nuls, la théorie de la racine carrée conduit à considérer deux classes d'entiers:

a) les restes quadratiques, c'est-à-dire ceux a pour lesquels la congruence

$$x^2 = a \ mod. \ p$$

admet des solutions.

b) les non-restes quadratiques, c'est-à-dire ceux b pour lesquels la congruence

$$x^2 = b \ mod \ p$$

n'a pas de solution.

Chaque classe contient le même nombre d'éléments.

Le produit de deux restes est un reste. Le produit d'un reste et d'un non-reste est un non-reste. Le produit de deux non-restes est un reste. L'application qui, à tout élément non nul du corps, fait correspondre le symbole $+$ si c'est un reste, et le symbole $-$ si c'est un non-reste, a donc les qualités multiplicatives de la « règle des signes ».

Il faut ensuite transporter cette qualification, par translation, dans le domaine, de façon à pouvoir dire que l'inégalité

$$x \succ y$$

signifie que $x - y$ est un reste quadratique, modulo p. Comme la somme de deux restes n'est pas toujours un reste, c'est ce point qui introduit les limitations du domaine de validité. Kustaanheimo a montré que si ϖ est le produit des k premiers nombres premiers impairs, en choisissant

$$p = -1 \text{ mod } 8\varpi$$

il existe une « chaîne euclidienne »

$$-M, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, +M$$

de $2M + 1$ entiers tels que, modulo p, tous les nombres $1, 2, \ldots M$ soient des restes quadratiques et tous les nombres $-1, -2, \ldots -M$ soient des non-restes. Le pavé affine formé des points dont les coordonnées sont prises dans une telle chaîne euclidienne est alors susceptible d'être muni de la métrique dans laquelle la distance est donnée par la règle de Pythagore.

Je renverrai, pour le développement de cette question, aux auteurs eux-mêmes.

(Achevé à Novosibirsk le 9 février 1968)

L. Gauthier
Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

vide-leer-empty