Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SUR LES CORPS DE CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Autor: Gauthier, Luc

Kapitel: III. Quelques questions de géométrie algébrique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43210

La détermination de la tangente courante à la quartique totalement symétrique Q, associée à l'homomorphisme d'élévation au cube, montre que l'équation tangentielle de Q est

$$u^4 + v^4 + w^4 = 0$$

cette courbe est donc *autoduale.*

D'un point P quelconque du plan on mène quatre tangentes à Q, formant un faisceau symétrique: leurs contacts sont alignés sur la semipolaire de P. Lorsque P est sur la quartique Q, sa semipolaire passe par P et est tangente à Q en un point P': le faisceau est alors formé de PP' triple et de la tangente en P simple.

Comme la quartique Q ne comporte aucune singularité ponctuelle, elle est de genre 3. En géométrie projective complexe les quartiques de genre 3 sont de classe 12. Nous rencontrons ici, pour la seconde fois, le fait qu'en géométrie sur un corps de caractéristique p les propriétés tangentielles sont profondément différentes de celles de la géométrie complexe classique. Dans la théorie des coniques, pour $p = 2$ nous avons trouvé que l'enveloppe des tangentes n'est pas du tout la conique elle-même, mais le nucléon de la conique, qui est de classe 1. Dans la présente étude, en caractéristique $p = 3$, la quartique Q est bien l'enveloppe de ses tangentes, mais le point caractéristique d'une tangente:

$$X = u^3 \qquad Y = v^3 \qquad Z = w^3$$

n'est pas le point de contact, puisque

$$u = x_0^3 \qquad v = y_0^3 \qquad w = z_0^3$$

C'est le point déduit du point de contact par l'homomorphisme $x \rightarrow x^9$: c'est le tangentiel du point de contact.

Nous verrons plus loin comment peut être élaborée non seulement la géométrie tangentielle, mais toute la géométrie infinitésimale.

III. Quelques questions de géométrie algébrique

Pour rester fidèle au but que je me suis proposé, je me bornerai ici à indiquer quelques théorèmes classiques de la géométrie complexe qui perdent leur validité en géométrie sur un corps de caractéristique p.

Nous avons montré, comme conséquence de l'homomorphisme fondamental, qu'il n'y a pas, en géométrie sur un corps de caractéristique deux, de faisceaux involutifs, mais qu'en revanche il existe des faisceaux de droites doubles:

$$y^2 - \lambda x^2 = 0$$

Plus généralement, sur un corps de caractéristique p

$$y^p - \lambda x^p = 0$$

représente un faisceau linéaire de droites p-uples.

Le théorème classique de Bertini assurant que la courbe générale d'un système linéaire privé de composante fixe ne peut avoir de point multiple variable est donc essentiellement lié à l'absence d'extensions inséparables et appartient au seul domaine de la géométrie sur un corps de caractéristique zéro (ou infinie, suivant les notations du lecteur).

La quartique totalement symétrique que nous avons présentée en géométrie sur un corps de caractéristique 3 fournit, elle aussi, en tant que courbe totalement inflexionnelle, un contre-exemple au *théorème complémentaire de Weierstrass*: Le théorème des lacunes, dont on peut donner une démonstration valable en toute caractéristique, affirme que toute place d'une courbe de genre g peut être l'unique pôle d'une fraction rationnelle définie sur la courbe, l'ordre de multiplicité de ce pôle prenant toute valeur entière, à part g lacunes inférieures à $2g$. Le théorème complémentaire affirme que sauf en un nombre fini de places exceptionnelles, les lacunes sont 1, 2, ..., g.

Pour une courbe de genre $g = 3$, le modèle canonique est une quartique plane; en un point ordinaire les lacunes sont 1, 2, 3: les points exceptionnels de Weierstrass sont les points d'inflexion. La quartique totalement symétrique Q admet tous ses points comme points d'inflexion, donc comme points exceptionnels de Weierstrass. Il est d'ailleurs facile de vérifier que les lacunes sont 1, 2, 4 sauf lorsqu'on choisit l'un des 28 points de la configuration de réciprocité, pour lesquels les lacunes sont 1, 2, 5.

Considérons maintenant, dans un espace projectif à trois dimensions, sur un corps de caractéristique trois, la surface

$$xy^3 + yz^3 + zt^3 + tx^3 = 0$$

c'est une variété hermitienne, dont nous allons obtenir une représentation paramétrique rationnelle en posant:

$$z = u^3 x$$

$$y + ut = vx$$

On obtient, effectivement

$$x = u^{10} - 1$$
$$y = -v(uv^2 + 1)$$
$$z = u^3(u^{10} - 1)$$
$$t = v(v^2 + u^9)$$

Comme u est défini par son cube, il a, pour un point donné, une valeur unique: cette représentation rationnelle biunivoque ne peut cependant pas être modifiée en une représentation birationnelle, car une surface du quatrième ordre sans singularité a tous ses genres égaux à 1. Nous obtenons ainsi un contre-exemple au *théorème classique de Castelnuovo* relatif aux surfaces rationnelles.

Les variétés hermitiennes fournissent des exemples en toute dimension (exception faite des courbes) de variétés admettant des représentations rationnelles biunivoques, mais non birationnelles, avec des genres non bornés.

IV. La géométrie infinitésimale

Nous avons rencontré, en géométrie sur un corps de caractéristique trois, une quartique dont tous les points sont inflexionnels. C'est un exemple de courbe dont tous les points sont singuliers du point de vue tangentiel. Le fait, que nous avons rencontré également, que l'enveloppe des tangentes à une courbe n'est pas la courbe elle-même, montre, lui aussi, la nécessité de préciser les fondements de la géométrie infinitésimale.

a) Il faut d'abord donner une signification claire aux notions de voisinages d'un point sur une courbe (plus généralement sur une variété). C'est une question de nature topologique, et tant que l'on considère les points d'une courbe à coordonnées prises dans un corps fini, ils forment un ensemble discret qui n'est naturellement muni que de la topologie discrète. Mais, dès que l'on effectue des extensions infinies du corps de base, c'est-à-dire dès que l'on associe à une courbe la connaissance de son équation, on peut associer à chaque point des représentations paramétriques locales, et définir des voisinages de tous ordres.

Soit a une coordonnée quelconque d'un point. On la remplace par la série formelle

$$x = a + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

qui admet pour spécialisation a, lorsque $t = 0$. Les coefficients successifs