

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	15 (1969)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	ONE-SIDED ANALOGUES OF KARAMATA's REGULAR VARIATION
Autor:	Feller, William
Kapitel:	2. Dominated variation
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-43209

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

2. DOMINATED VARIATION

We start from the following

DEFINITION. *A monotone function U varies dominatedly if*

$$\lim \sup \frac{U(2t)}{U(t)} < \infty \quad \text{in case } U \uparrow$$

(2.1)

$$\lim \sup \frac{U(t/2)}{U(t)} < \infty \quad \text{in case } U \downarrow.$$

This leads immediately to the

CRITERION. *A non-decreasing U varies dominatedly if there exist constants C , γ , and t_0 such that*

$$(2.2) \quad \frac{U(tx)}{U(t)} < Cx^\gamma \quad x > 1, t > t_0.$$

For non-increasing U the same criterion applies with $x > 1$ replaced by $x < 1$.

PROOF. The sufficiency is obvious. Assume (2.1) and choose t_0 and C such that

$$(2.3) \quad \frac{U(2t)}{U(t)} < C \quad \text{for } t > t_0.$$

Put $\gamma = \log_2 C$. For $x > 1$ define n by $2^{n-1} < x \leq 2^n$. A repeated application of (2.3) then shows that the left side in (2.2) is $\leq C^n \leq Cx^\gamma$.

Dominated variation of U may be described by saying that *the measures associated with $U(t)/U(t)$ form a sequentially compact family* in the sense that every sequence contains a subsequence converging on finite intervals to a finite measure. As in the case of slowly varying functions, the occurrence of limit measures that vanish identically on $(0, \infty)$ introduces some lack of symmetry. The supplementary condition (4.1) is designed to avoid this anomaly.