Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Autor: Delange, Hubert

Kapitel: 6. Fonctions génératrices

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43206

a étant une fonction de $\mathscr{A}_2$ et F une fonction de X_2, on désignera par $a \perp F$ la fonction G de X_2 définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

a étant fixée, l'application $F \rightarrow a \perp F$ est une application linéaire de X_2 dans X_2.

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

a) Quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

b) Quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathscr{A}_2$ et $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

c) Quelles que soient $F \in X_2$, a et $b \in \mathscr{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a_* b) \perp F .$$

6. Fonctions génératrices

6.1. A la fonction f de $\mathscr{A}_2$ nous associons la série double

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où s et s' sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de s et s' pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de f.

Si les séries associées aux fonctions f et g de $\mathscr{A}_2$ sont absolument convergentes pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f_* g$ et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits $m_1 m_2$ et les produits $n_1 n_2$ ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.

6.2. f étant une fonction de $\mathfrak{M}_2$, et σ et σ' étant deux nombres réels, si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} \frac{|f(p^j, p^k)|}{p^{j\sigma+k\sigma'}} < +\infty ,$$

la série

$$\sum_{m,n \geqq 1} \frac{f(m,n)}{m^s n^{s'}}$$

est absolument convergente pour $\mathcal{R}s \geqslant \sigma$ et $\mathcal{R}s' \geqslant \sigma'$ et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left[\sum_{j,k \geqq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{js+ks'}} \right].$$

Pour établir ce résultat, il suffit de prouver que, si $g \in \mathfrak{M}_2$ et si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} |g(p^j, p^k)| < +\infty ,$$

la série $\sum_{m,n \geqq 1} g(m,n)$ est absolument convergente et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left[\sum_{j,k \geqq 0} g(p^j, p^k) \right]. \tag{15}$$

Le résultat voulu s'en déduira en prenant $g(m,n) = \dfrac{f(m,n)}{m^s\, n^{s'}}$.

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant.

Le produit infini (15) s'écrit

$$\prod_{r=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k \geqq 0} g(p_r^j, p_r^k) \right].$$

Il est absolument convergent car, pour chaque r,

$$\Big| \sum_{j,k \geqq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \Big| = \Big| \sum_{\substack{j,k \geqq 0 \\ j-k>0}} g(p_r^j, p_r^k) \Big| \leqslant \sum_{\substack{j,k \geqq 0 \\ j+k>0}} |g(p_r^j, p_r^k)| ,$$

de sorte que

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \left| \sum_{j,k\geq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| < +\infty .$$

On voit en même temps que le produit infini

$$\prod_{r=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k\geq 0} |g(p_r^j, p_r^k)| \right]$$

est convergent. Soit P sa valeur.

Soient maintenant g_r et h_r les fonctions de $\mathfrak{M}_2$ déterminées par

$$g_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si} \quad p \leqslant p_r , \\ 0 & \text{si} \quad p > p_r , \end{cases}$$

et

$$h_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si} \quad p = p_r , \\ 0 & \text{si} \quad p \neq p_r . \end{cases}$$

(j et $k \geqslant 0$, $j + k > 0$).

Il résulte de la formule (13) que, pour chaque couple $[m, n]$, $g_r(m, n)$ tend vers $g(m, n)$ quand r tend vers $+\infty$.

De plus, on voit que, pour chaque $r \geqslant 1$,

$$g_{r+1} = g_r * h_{r+1} \qquad \text{et} \qquad |g_{r+1}| = |g_r| * |h_{r+1}| ,$$

et on en déduit, par récurrence sur r, que, pour chaque $r \geqslant 1$, la série $\sum_{m,n\geq 1} g_r(m, n)$ est absolument convergente et on a

(16) $$\sum_{m,n\geq 1} |g_r(m, n)| = \prod_{q=1}^{r} \left[\sum_{j,k\geq 0} |g(p_q^j, p_q^k)| \right]$$

et

(17) $$\sum_{m,n\geq 1} g_r(m, n) = \prod_{q=1}^{r} \left[\sum_{j\, k\geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

Il résulte de (16) que, quel que soit $x \geqslant 1$, on a pour tout $r \geqslant 1$

$$\sum_{m,n\leq x} |g_r(m, n)| \leqslant P .$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sum_{m,n\leq x} |g(m, n)| \leqslant P$$

et il en résulte que la série $\sum_{m,n \geq 1} |g(m, n)|$ est convergente.

Maintenant, d'après la formule (13), pour chaque couple $[m, n]$, on a

$$|g_r(m, n)| \leqslant |g(m, n)| \quad \text{quel que soit } r \geqslant 1.$$

Alors (17) donne, par passage à la limite pour r tendant vers $+\infty$,

$$\sum_{m,n \geq 1} g(m, n) = \prod_{q=1}^{+\infty} \left[\sum_{j,k \geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

(Reçu le 27 avril 1968)

H. Delange
Faculté des Sciences de l'Université de Paris à Orsay
91 - Orsay