

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	15 (1969)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS
<b>Autor:</b>	Delange, Hubert
<b>Kapitel:</b>	6. Fonctions génératrices
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-43206">https://doi.org/10.5169/seals-43206</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$a$  étant une fonction de  $\mathcal{A}_2$  et  $F$  une fonction de  $X_2$ , on désignera par  $a \perp F$  la fonction  $G$  de  $X_2$  définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

$a$  étant fixée, l'application  $F \rightarrow a \perp F$  est une application linéaire de  $X_2$  dans  $X_2$ .

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

- a) Quelle que soit  $F \in X_2$ ,  $e_2 \perp F = F$ ;
- b) Quels que soient  $F \in X_2$ ,  $a \in \mathcal{A}_2$  et  $\lambda \in \mathbf{C}$ ,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F);$$

- c) Quelles que soient  $F \in X_2$ ,  $a$  et  $b \in \mathcal{A}_2$ ,

$$a \perp (b \perp F) = (a * b) \perp F.$$

## 6. FONCTIONS GÉNÉRATRICES

6.1. A la fonction  $f$  de  $\mathcal{A}_2$  nous associons la série double

$$\sum_{m, n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où  $s$  et  $s'$  sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de  $s$  et  $s'$  pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de  $f$ .

Si les séries associées aux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{A}_2$  sont absolument convergentes pour  $\Re s = \sigma$  et  $\Re s' = \sigma'$ , il en est de même de la série associée à  $f * g$  et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour  $\Re s = \sigma$  et  $\Re s' = \sigma'$ , et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits  $m_1 m_2$  et les produits  $n_1 n_2$  ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.

6.2.  $f$  étant une fonction de  $\mathfrak{M}_2$ , et  $\sigma$  et  $\sigma'$  étant deux nombres réels, si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geq 0 \\ j-k > 0}} \frac{|f(p^j, p^k)|}{p^{j\sigma+k\sigma'}} < +\infty,$$

la série

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m,n)}{m^s n^{s'}}$$

est absolument convergente pour  $\Re s \geq \sigma$  et  $\Re s' \geq \sigma'$  et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod_p \left[ \sum_{j,k \geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{js+ks'}} \right].$$

Pour établir ce résultat, il suffit de prouver que, si  $g \in \mathfrak{M}_2$  et si l'on a

$$\sum_{\substack{p,j,k \\ j,k \geq 0 \\ j-k > 0}} |g(p^j, p^k)| < +\infty,$$

la série  $\sum_{m,n \geq 1} g(m, n)$  est absolument convergente et sa somme est égale à la valeur du produit infini absolument convergent

$$(15) \quad \prod_p \left[ \sum_{j,k \geq 0} g(p^j, p^k) \right].$$

Le résultat voulu s'en déduira en prenant  $g(m, n) = \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}}$ .

Soit  $p_1, p_2, \dots, p_r, \dots$  la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant.

Le produit infini (15) s'écrit

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left[ \sum_{j,k \geq 0} g(p_r^j, p_r^k) \right].$$

Il est absolument convergent car, pour chaque  $r$ ,

$$| \sum_{j,k \geq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 | = | \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j-k > 0}} g(p_r^j, p_r^k) | \leq \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k > 0}} |g(p_r^j, p_r^k)|,$$

de sorte que

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \left| \sum_{j,k \geq 0} g(p_r^j, p_r^k) - 1 \right| < +\infty.$$

On voit en même temps que le produit infini

$$\prod_{r=1}^{+\infty} \left[ \sum_{j,k \geq 0} |g(p_r^j, p_r^k)| \right]$$

est convergent. Soit  $P$  sa valeur.

Soient maintenant  $g_r$  et  $h_r$  les fonctions de  $\mathfrak{M}_2$  déterminées par

$$g_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si } p \leqslant p_r, \\ 0 & \text{si } p > p_r, \end{cases}$$

et

$$h_r(p^j, p^k) = \begin{cases} g(p^j, p^k) & \text{si } p = p_r, \\ 0 & \text{si } p \neq p_r. \end{cases}$$

( $j$  et  $k \geq 0$ ,  $j+k > 0$ ).

Il résulte de la formule (13) que, pour chaque couple  $[m, n]$ ,  $g_r(m, n)$  tend vers  $g(m, n)$  quand  $r$  tend vers  $+\infty$ .

De plus, on voit que, pour chaque  $r \geq 1$ ,

$$g_{r+1} = g_r * h_{r+1} \quad \text{et} \quad |g_{r+1}| = |g_r| * |h_{r+1}|,$$

et on en déduit, par récurrence sur  $r$ , que, pour chaque  $r \geq 1$ , la série  $\sum_{m,n \geq 1} g_r(m, n)$  est absolument convergente et on a

$$(16) \quad \sum_{m,n \geq 1} |g_r(m, n)| = \prod_{q=1}^r \left[ \sum_{j,k \geq 0} |g(p_q^j, p_q^k)| \right]$$

et

$$(17) \quad \sum_{m,n \geq 1} g_r(m, n) = \prod_{q=1}^r \left[ \sum_{j,k \geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

Il résulte de (16) que, quel que soit  $x \geq 1$ , on a pour tout  $r \geq 1$

$$\sum_{m,n \leq x} |g_r(m, n)| \leq P.$$

En faisant tendre  $r$  vers  $+\infty$ , on obtient à la limite

$$\sum_{m,n \leq x} |g(m, n)| \leq P$$

et il en résulte que la série  $\sum_{m,n \geq 1} |g(m, n)|$  est convergente.

Maintenant, d'après la formule (13), pour chaque couple  $[m, n]$ , on a

$$|g_r(m, n)| \leq |g(m, n)| \quad \text{quel que soit } r \geq 1.$$

Alors (17) donne, par passage à la limite pour  $r$  tendant vers  $+\infty$ ,

$$\sum_{m,n \geq 1} g(m, n) = \prod_{q=1}^{+\infty} \left[ \sum_{j,k \geq 0} g(p_q^j, p_q^k) \right].$$

(*Reçu le 27 avril 1968*)

H. Delange  
Faculté des Sciences de l'Université de Paris à Orsay  
91 - Orsay