Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Autor: Delange, Hubert

Kapitel: 5. Fonctions de A_2 comme opérateurs

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43206

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

4.1.1. Il est clair que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$ et il résulte de (7) et (8) que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $G_1 \otimes G_1$, donc de G_2.

On voit immédiatement que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Par suite $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

E étant l'endomorphisme de G_2 considéré au § 3, soit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap E^{-1}(e_2)$.

$\mathfrak{N}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme intersection de deux sous-groupes, donc est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{M}_2$ est produit direct de $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$.

En effet, on a vu au § 3 que G_2 est produit direct de $E^{-1}(e_2)$ et $G_1 \otimes G_1$ et que, dans l'expression d'une fonction f de G_2 sous la forme

$$f = g * h, \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1,$$

on a $h = E(f)$ et $g = f_* h^{-*}$.

Mais on voit immédiatement que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $E(f) \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$. Donc, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ et par suite $h \in \mathfrak{M}_2$, $g \in \mathfrak{M}_2$ et finalement $g \in \mathfrak{N}_2$. De plus, l'expression de f sous la forme

$$f = g_* h, \quad \text{où} \quad g \in \mathfrak{N}_2 \quad \text{et} \quad h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1,$$

est unique parce que $\mathfrak{N}_2 \subset E^{-1}(e_2)$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$.

On voit de suite que $\mathfrak{N}_2$ est l'ensemble des fonctions g de $\mathfrak{M}_2$ qui satisfont à

$$g(p^j, p^k) = 0 \quad \text{quand } j \text{ ou } k = 0 \text{ mais } j+k>0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$g(m, n) = 0 \quad \text{quand } \{p \mid p/m\} \neq \{p \mid p/n\}.$$

5. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs

Il est classique d'utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$, espace vectoriel que nous désignerons par X_1:

a étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et F une fonction de X_1, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction G de X_1 définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel X_2 des fonctions complexes de deux variables réelles $\geqslant 1$.

a étant une fonction de $\mathscr{A}_2$ et F une fonction de X_2, on désignera par $a \perp F$ la fonction G de X_2 définie par

$$G(x, y) = \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} a(m, n) F\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right).$$

a étant fixée, l'application $F \to a \perp F$ est une application linéaire de X_2 dans X_2.

De plus, on vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

a) Quelle que soit $F \in X_2$, $e_2 \perp F = F$;

b) Quels que soient $F \in X_2$, $a \in \mathscr{A}_2$ et $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$(\lambda a) \perp F = \lambda (a \perp F) ;$$

c) Quelles que soient $F \in X_2$, a et $b \in \mathscr{A}_2$,

$$a \perp (b \perp F) = (a_* b) \perp F .$$

6. Fonctions génératrices

6.1. A la fonction f de $\mathscr{A}_2$ nous associons la série double

$$\sum_{m,n \geq 1} \frac{f(m, n)}{m^s n^{s'}},$$

où s et s' sont deux variables complexes.

S'il existe des valeurs de s et s' pour lesquelles cette série est convergente, la fonction qu'elle représente est dite « fonction génératrice » de f.

Si les séries associées aux fonctions f et g de $\mathscr{A}_2$ sont absolument convergentes pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, il en est de même de la série associée à $f_* g$ et sa somme est le produit des sommes des deux premières.

Pour le voir, il suffit de considérer la série quadruple

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 1} \frac{f(m_1, n_1) g(m_2, n_2)}{m_1^s m_2^s n_1^{s'} n_2^{s'}},$$

qui est absolument convergente pour $\mathscr{R}s = \sigma$ et $\mathscr{R}s' = \sigma'$, et de grouper ensemble les termes pour lesquels les produits $m_1 m_2$ et les produits $n_1 n_2$ ont les mêmes valeurs.

Ainsi, comme dans le cas d'une variable, la convolution correspond à la multiplication des fonctions génératrices.