Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Autor: Delange, Hubert

Kapitel: 4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43206

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et

$$E(f) = E(g) * E(h) = e_2 * E(h) = E(h).$$

On voit de suite que $E^{-1}(e_2)$ est l'ensemble des $g \in G_2$ telles que

$$g(1, 1) = 1,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1$$

et

$$g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(1, 1) = 1,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1,$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$(10) \qquad f(m, n) = \frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition $g(1, 1) = 1$, car elle est une conséquence de (10) pour $m = n = 1$. On peut aussi supprimer dans (10) le facteur $\frac{1}{f(1, 1)}$, en multipliant la fonction g par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$(11) \qquad g(m, 1) = 0 \text{ pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1, n) = 0 \text{ pour } n > 1$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$(12) \qquad f(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

La fonction f de $\mathscr{A}_2$ sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1, 1) = 1$$

et $f(m' m'', n' n'') = f(m', n') f(m'', n'')$ lorsque $(m' n', m'' n'') = 1$ [1].

Elle sera dite additive si l'on a

$f(m' m'', n' n'') = f(m', n') + f(m'', n'')$ lorsque $(m' n', m'' n'') = 1$ (ce qui entraîne $f(1, 1) = 0$, comme on le voit en prenant $m' = m'' = n' = n'' = 1$).

Le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de m et n sont des fonctions multiplicatives de m et n. Il en est de même de la fonction égale à 1 quand $(m, n) = 1$ et à zéro quand $(m, n) > 1$.

Le nombre des diviseurs premiers communs à m et n, la somme de ces diviseurs, sont des fonctions additives de m et n.

On voit immédiatement qu'une fonction multiplicative, ou additive, est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour tous les couples $[p^j, p^k]$, où p est un nombre premier et j et k sont des entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k>0$.

Plus précisément, soit ρ_p la fonction de $\mathscr{A}_1$ définie par

$$\rho_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \nmid n, \\ p^r & \text{si} \quad p^r / n \quad \text{et} \quad p^{r+1} \nmid n, \ r > 0. \end{cases}$$

Si f est multiplicative, on a

$$f(m, n) = \prod_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)]. \tag{13}$$

Si f est additive, on a

$$f(m, n) = \sum_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)].$$

Dans les deux cas, les valeurs de $f(p^j, p^k)$ peuvent être choisies arbitrairement pour tous les nombres premiers p et tous les couples $[j, k]$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k>0$.

4.1. Nous désignerons par $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{A}_2$ qui sont multiplicatives, $\mathfrak{M}_1$ désignant l'ensemble des fonctions multiplicatives d'un entier >0.

Il est évident que $\mathfrak{M}_2 \subset G_2$. En fait, $\mathfrak{M}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme $\mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de G_1.

Tout d'abord, on voit immédiatement que, si f et $g \in \mathfrak{M}_2$, $f_* g \in \mathfrak{M}_2$.

En effet, si $(m' n', m'' n'') = 1$, on a $(m', m'') = (n', n'') = 1$ et on obtient tous les diviseurs de $m' m''$, chacun une fois, en formant tous les

[1] La condition $f(1, 1) = 1$ est conséquence de la deuxième condition si l'on suppose que f n'est pas identiquement nulle. Nous l'introduisons pour écarter la fonction identiquement nulle.

produits $d'_1\, d''_1$ où d'_1/m' et d''_1/m'', et tous les diviseurs de $n'\, n''$, chacun une fois, en formant tous les produits $d'_2\, d''_2$, où d'_2/n' et d''_2/n''.

On a d'ailleurs

$$(d'_1\, d'_2, d''_1\, d''_2) = \left(\frac{m'}{d'_1}\frac{n'}{d'_2}, \frac{m''}{d''_1}\frac{n''}{d''_2}\right) = 1.$$

On voit ainsi que, si $h = f * g$, avec f et $g \in \mathfrak{M}_2$, et si $(m'\, n', m''\, n'') = 1$, on a

$$\begin{aligned}
h(m'\, n', m''\, n'') &= \sum_{\substack{d'_1/m',\, d''_1/m'' \\ d'_2/n',\, d''_2/n''}} f(d'_1 d''_1, d'_2\, d''_2)\, g\left(\frac{m'\, m''}{d'_1\, d''_1}, \frac{n'\, n''}{d'_2\, d''_2}\right) \\
&= \sum_{\substack{d'_1/m',\, d''_1/m'' \\ d'_2/n',\, d''_2/n''}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right) f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right) \\
&= \left\{\sum_{\substack{d'_1/m' \\ d'_2/n'}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right)\right\}\left\{\sum_{\substack{d''_1/m'' \\ d''_2/n''}} f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right)\right\} \\
&= h(m', n')\, h(m'', n'')\,.
\end{aligned}$$

Pour montrer que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $f^{-*} \in \mathfrak{M}_2$, on peut procéder de la façon suivante.

On montre que, pour chaque nombre premier p, on peut déterminer les nombres $a_p(j, k)$, où j et k sont des entiers $\geqslant 0$ et $j+k>0$, de façon que l'on ait pour j et $k \geqslant 0$ et $j+k>0$

$$f(p^j, p^k) + \sum_{\substack{0 \leq j' \leq j \\ 0 \leq k' \leq k \\ j'+k'>0}} f(p^{j-j'}, p^{k-k'})\, a_p(j', k') = 0\,. \tag{14}$$

Pour cela, on fait un raisonnement semblable à celui par lequel on a montré au § 2.1 que, si $f \in \mathscr{A}_2$ et $f(1, 1) \neq 0$, f est inversible.

Ceci dit, on peut déterminer une fonction g de $\mathfrak{M}_2$ par

$$g(p^j, p^k) = a_p(j, k) \qquad \text{pour} \qquad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j+k>0\,.$$

On sait que $f * g \in \mathfrak{M}_2$. Mais (14) montre que, si $h = f * g$, on a

$$h(p^j, p^k) = 0 \qquad \text{pour} \qquad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j+k>0\,,$$

et, d'après (13) appliquée à h, ceci entraîne $h = e_2$.

Donc $g = f^{-*}$.

4.1.1. Il est clair que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$ et il résulte de (7) et (8) que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $G_1 \otimes G_1$, donc de G_2.

On voit immédiatement que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Par suite $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

E étant l'endomorphisme de G_2 considéré au § 3, soit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap E^{-1}(e_2)$.

$\mathfrak{N}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme intersection de deux sous-groupes, donc est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{M}_2$ est produit direct de $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$.

En effet, on a vu au § 3 que G_2 est produit direct de $E^{-1}(e_2)$ et $G_1 \otimes G_1$ et que, dans l'expression d'une fonction f de G_2 sous la forme

$$f = g_* h, \qquad \text{où} \qquad g \in E^{-1}(e_2) \qquad \text{et} \qquad h \in G_1 \otimes G_1,$$

on a $h = E(f)$ et $g = f_* h^{-*}$.

Mais on voit immédiatement que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $E(f) \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$. Donc, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ et par suite $h \in \mathfrak{M}_2$, $g \in \mathfrak{M}_2$ et finalement $g \in \mathfrak{N}_2$. De plus, l'expression de f sous la forme

$$f = g_* h, \qquad \text{où} \qquad g \in \mathfrak{N}_2 \qquad \text{et} \qquad h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1,$$

est unique parce que $\mathfrak{N}_2 \subset E^{-1}(e_2)$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$.

On voit de suite que $\mathfrak{N}_2$ est l'ensemble des fonctions g de $\mathfrak{M}_2$ qui satisfont à

$$g(p^j, p^k) = 0 \qquad \text{quand } j \text{ ou } k = 0 \text{ mais } j+k>0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$g(m, n) = 0 \qquad \text{quand } \{p \mid p/m\} \neq \{p \mid p/n\}.$$

5. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs

Il est classique d'utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$, espace vectoriel que nous désignerons par X_1:

a étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et F une fonction de X_1, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction G de X_1 définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel X_2 des fonctions complexes de deux variables réelles $\geqslant 1$.