

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1969)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS  
**Autor:** Delange, Hubert  
**Kapitel:** 3.  $\$G_2\$$  PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43206>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer  $g$  de façon que l'on ait (2) quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ .

On détermine  $g(m, n)$  pour  $m$  et  $n$  quelconques  $\geq 1$  en utilisant une récurrence sur  $n$  et, pour chaque  $n$ , une récurrence sur  $m$ .

On détermine d'abord  $g(m, 1)$  pour tous les  $m \geq 1$  en prenant

$$(3) \quad g(1, 1) = \frac{1}{f(1, 1)}$$

puis, pour  $m > 1$ ,

$$(4) \quad g(m, 1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d|m \\ d>1}} f(d, 1) g\left(\frac{m}{d}, 1\right).$$

Ensuite,  $g(m, n)$  étant déjà déterminé pour  $n \leq q$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ , on détermine  $g(m, q+1)$  pour tous les  $m \geq 1$  en prenant

$$(5) \quad g(1, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d|q+1 \\ d>1}} f(1, d) g\left(1, \frac{q+1}{d}\right)$$

puis, pour  $m > 1$ ,

$$(6) \quad g(m, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right).$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour  $n = 1$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ . Pour chaque  $q \geq 1$ , il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour  $n = q+1$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ .

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de  $\mathcal{A}_2$  est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par  $G_2$  et nous désignerons de même par  $G_1$  le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{A}_1$  (qui sont les fonctions arithmétiques telles que  $f(1) \neq 0$ ).

Dans  $\mathcal{A}_2$  comme dans  $\mathcal{A}_1$  nous désignerons par  $f^{-*}$  l'élément inverse de  $f$ , s'il existe.

### 3. $G_2$ PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

$h_1$  et  $h_2$  étant deux fonctions de  $\mathcal{A}_1$ , nous désignerons par  $h_1 \otimes h_2$  la fonction  $h$  de  $\mathcal{A}_2$  définie par

$$h(m, n) = h_1(m) h_2(n).$$

$A$  et  $B$  étant deux parties de  $\mathcal{A}_1$ ,  $A \otimes B$  sera l'ensemble des éléments  $h_1 \otimes h_2$  de  $\mathcal{A}_2$ , où  $h_1 \in A$  et  $h_2 \in B$ .

Il est évident que  $G_1 \otimes G_1 \subset G_2$  et que  $e_1 \otimes e_1 = e_2$ .

D'autre part, on voit immédiatement que, si  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{A}_1$ , on a

$$(7) \quad (f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2) = (f_1 * g_1) \otimes (f_2 * g_2),$$

et il en résulte que, si  $f$  et  $g \in G_1$ ,

$$(8) \quad (f \otimes g)^{-*} = f^{-*} \otimes g^{-*}.$$

On voit ainsi que  $G_1 \otimes G_1$  est un sous-groupe de  $G_2$ .

On peut aussi le voir en remarquant que c'est l'image de  $G_2$  par un certain endomorphisme.

En effet, considérons l'application  $E$  de  $G_2$  dans  $\mathcal{A}_2$  qui à la fonction  $f$  de  $G_2$  fait correspondre la fonction  $h$  définie par

$$h(m, n) = \frac{f(m, 1)f(1, n)}{f(1, 1)}.$$

On voit que  $E$  est un endomorphisme de  $G_2$ :

D'abord, il est évident que, quel que soit  $f \in G_2$ ,  $E(f) \in G_2$ .

D'autre part, quels que soient  $f$  et  $g \in G_2$ ,

$$E(f * g) = E(f) * E(g).$$

L'image de  $G_2$  par  $E$  est  $G_1 \otimes G_1$  car, d'une part, il est clair que, quel que soit  $f \in G_2$ ,  $E(f) \in G_1 \otimes G_1$ , d'autre part, on voit immédiatement que, si  $f \in G_1 \otimes G_1$ ,  $E(f) = f$ .

Il est à noter que ces propriétés entraînent que  $E^2 = E$ .

Alors, d'après un résultat classique,  $G_2$  est le produit direct du noyau  $E^{-1}(e_2)$  de  $E$  et de  $E(G_2) = G_1 \otimes G_1$ :

Toute  $f \in G_2$  peut se mettre de façon unique sous la forme

$$(9) \quad f = g * h, \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1.$$

Plus précisément, on a

$$h = E(f) \quad \text{et} \quad g = f * h^{-*}.$$

En effet, si  $g$  et  $h$  sont ainsi déterminés, on a bien  $f = g * h$ ,  $h$  appartient à  $G_1 \otimes G_1$ , et on a

$$E(f) = E(g) * E(h) = E(g) * E^2(f) = E(g) * E(f),$$

de sorte que  $E(g) = e_2$ .

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et 
$$E(f) = E(g) * E(h) = e_2 * E(h) = E(h).$$

On voit de suite que  $E^{-1}(e_2)$  est l'ensemble des  $g \in G_2$  telles que

$$\begin{aligned} g(1, 1) &= 1, \\ g(m, 1) &= 0 \quad \text{pour } m > 1 \\ g(1, n) &= 0 \quad \text{pour } n > 1. \end{aligned}$$

et

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction  $f$  de  $G_2$  correspond une fonction  $g$  unique satisfaisant à

$$\begin{aligned} g(1, 1) &= 1, \\ g(m, 1) &= 0 \quad \text{pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1, \end{aligned}$$

et telle que l'on ait pour  $m$  et  $n \geq 1$

$$(10) \quad f(m, n) = \frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition  $g(1, 1) = 1$ , car elle est une conséquence de (10) pour  $m = n = 1$ . On peut aussi supprimer dans (10) le facteur  $\frac{1}{f(1, 1)}$  en multipliant la fonction  $g$  par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction  $f$  de  $G_2$  correspond une fonction  $g$  unique satisfaisant à

$$(11) \quad g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \quad \text{et} \quad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1$$

et telle que l'on ait pour  $m$  et  $n \geq 1$

$$(12) \quad f(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

#### 4. FONCTIONS MULTIPLICATIVES ET FONCTIONS ADDITIVES

La fonction  $f$  de  $\mathcal{A}_2$  sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1, 1) = 1$$