Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 15 (1969)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Autor: Delange, Hubert

Kapitel: 3. G_2 PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43206

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer g de façon que l'on ait (2) quels que soient m et $n \geqslant 1$.

On détermine $g(m, n)$ pour m et n quelconques $\geqslant 1$ en utilisant une récurrence sur n et, pour chaque n, une récurrence sur m.

On détermine d'abord $g(m, 1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1,1) = \frac{1}{f(1,1)} \tag{3}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m,1) = -\frac{1}{f(1,1)} \sum_{\substack{d/m \\ d>1}} f(d,1)\, g\left(\frac{m}{d}, 1\right). \tag{4}$$

Ensuite, $g(m, n)$ étant déjà déterminé pour $n \leqslant q$ et m quelconque $\geqslant 1$, on détermine $g(m, q+1)$ pour tous les $m \geqslant 1$ en prenant

$$g(1,q+1) = -\frac{1}{f(1,1)} \sum_{\substack{d/q+1 \\ d>1}} f(1,d)\, g\left(1, \frac{q+1}{d}\right) \tag{5}$$

puis, pour $m > 1$,

$$g(m,q+1) = -\frac{1}{f(1,1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1,d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right). \tag{6}$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour $n = 1$ et m quelconque $\geqslant 1$. Pour chaque $q \geqslant 1$, il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour $n = q+1$ et m quelconque $\geqslant 1$.

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{A}_2$ est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par G_2 et nous désignerons de même par G_1 le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{A}_1$ (qui sont les fonctions arithmétiques telles que $f(1) \neq 0$).

Dans $\mathscr{A}_2$ comme dans $\mathscr{A}_1$ nous désignerons par f^{-*} l'élément inverse de f, s'il existe.

3. G_2 PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

h_1 et h_2 étant deux fonctions de $\mathscr{A}_1$, nous désignerons par $h_1 \otimes h_2$ la fonction h de $\mathscr{A}_2$ définie par

$$h(m,n) = h_1(m)\, h_2(n).$$

A et B étant deux parties de $\mathscr{A}_1$, $A \otimes B$ sera l'ensemble des éléments $h_1 \otimes h_2$ de $\mathscr{A}_2$, où $h_1 \in A$ et $h_2 \in B$.

Il est évident que $G_1 \otimes G_1 \subset G_2$ et que $e_1 \otimes e_1 = e_2$.

D'autre part, on voit immédiatement que, si $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathscr{A}_1$, on a

$$(f_1 \otimes f_2)_* (g_1 \otimes g_2) = (f_{1*} g_1) \otimes (f_{2*} g_2) , \tag{7}$$

et il en résulte que, si f et $g \in G_1$,

$$(f \otimes g)^{-*} = f^{-*} \otimes g^{-*} . \tag{8}$$

On voit ainsi que $G_1 \otimes G_1$ est un sous-groupe de G_2.

On peut aussi le voir en remarquant que c'est l'image de G_2 par un certain endomorphisme.

En effet, considérons l'application E de G_2 dans $\mathscr{A}_2$ qui à la fonction f de G_2 fait correspondre la fonction h définie par

$$h(m, n) = \frac{f(m, 1) f(1, n)}{f(1, 1)} .$$

On voit que E est un endomorphisme de G_2:

D'abord, il est évident que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_2$.

D'autre part, quels que soient f et $g \in G_2$,

$$E(f_* g) = E(f)_* E(g) .$$

L'image de G_2 par E est $G_1 \otimes G_1$ car, d'une part, il est clair que, quel que soit $f \in G_2$, $E(f) \in G_1 \otimes G_1$, d'autre part, on voit immédiatement que, si $f \in G_1 \otimes G_1$, $E(f) = f$.

Il est à noter que ces propriétés entraînent que $E^2 = E$.

Alors, d'après un résultat classique, G_2 est le produit direct du noyau $E^{-1}(e_2)$ de E et de $E(G_2) = G_1 \otimes G_1$:

Toute $f \in G_2$ peut se mettre de façon unique sous la forme

$$f = g_* h , \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1 . \tag{9}$$

Plus précisément, on a

$$h = E(f) \quad \text{et} \quad g = f_* h^{-*} .$$

En effet, si g et h sont ainsi déterminés, on a bien $f = g_* h$, h appartient à $G_1 \otimes G_1$, et on a

$$E(f) = E(g)_* E(h) = E(g)_* E^2(f) = E(g)_* E(f) ,$$

de sorte que $E(g) = e_2$.

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et
$$E(f) = E(g) _* E(h) = e_2 {}_* E(h) = E(h).$$

On voit de suite que $E^{-1}(e_2)$ est l'ensemble des $g \in G_2$ telles que

$$g(1, 1) = 1\,,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1$$
et
$$g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1\,.$$

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(1, 1) = 1\,,$$
$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1,$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$(10) \qquad f(m, n) = \frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition $g(1, 1) = 1$, car elle est une conséquence de (10) pour $m = n = 1$. On peut aussi supprimer dans (10) le facteur $\dfrac{1}{f(1, 1)}$, en multipliant la fonction g par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$(11) \qquad g(m, 1) = 0 \text{ pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1, n) = 0 \text{ pour } n > 1$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$(12) \qquad f(m, n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

La fonction f de $\mathscr{A}_2$ sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1, 1) = 1$$