

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1969)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS  
**Autor:** Delange, Hubert  
**Kapitel:** 2.  $\mathbb{A}_2$  COMME ALGÈBRE SUR  $\mathbb{C}$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43206>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS ENTIERS STRICTEMENT POSITIFS

Hubert DELANGE

*A la mémoire de J. Karamata*

## 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étendre aux fonctions de plusieurs entiers strictement positifs quelques notions usuelles relatives aux fonctions d'un entier strictement positif — communément appelées « fonctions arithmétiques » — et d'en étudier les propriétés élémentaires.

Nous désignerons par  $\mathcal{A}_q$  l'ensemble des fonctions réelles ou complexes de  $q$  entiers strictement positifs.

Pour la simplicité de l'exposé, nous nous bornerons au cas où  $q \leq 2$ , mais il n'y a aucune différence essentielle entre le cas où  $q = 2$  et le cas où  $q > 2$ .

Dans toute la suite,  $a$  et  $b$  étant deux entiers strictement positifs, le symbole  $(a, b)$ , considéré isolément, désigne, comme il est d'usage, le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$ .

$a|b$  signifie «  $a$  divise  $b$  ».  $a \nmid b$  signifie «  $a$  ne divise pas  $b$  ».

La lettre  $p$  désigne toujours un nombre premier.

## 2. $\mathcal{A}_2$ COMME ALGÈBRE SUR $\mathbf{C}$

Il est classique de munir  $\mathcal{A}_1$  d'une structure d'algèbre sur  $\mathbf{C}$  de la façon suivante:

L'addition de deux éléments de  $\mathcal{A}_1$  et la multiplication d'un élément de  $\mathcal{A}_1$  par un nombre complexe sont définis comme il est habituel pour les fonctions complexes définies sur un ensemble donné — ce qui fait de l'ensemble de ces fonctions un espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$ . On prend comme multiplication de deux éléments de  $\mathcal{A}_1$  la convolution définie par

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

On peut faire la même chose pour  $\mathcal{A}_2$ .

On définit encore l'addition de deux éléments de  $\mathcal{A}_2$  et la multiplication d'un élément de  $\mathcal{A}_2$  par un nombre complexe à la manière habituelle.

On prend comme multiplication de deux éléments de  $\mathcal{A}_2$  la convolution définie comme suit:

$f * g$  est la fonction  $h$  définie par

$$h(m, n) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

On vérifie immédiatement que la convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, et que, quels que soient  $f$  et  $g \in \mathcal{A}_2$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on a

$$(\alpha f) * g = f * (\alpha g) = \alpha(f * g).$$

On a donc ainsi fait de  $\mathcal{A}_2$  une algèbre sur  $\mathbb{C}$ .

2.1. On voit immédiatement que, comme  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  possède une unité. C'est la fonction  $e_2$  définie par

$$e_2(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n = 1, \\ 0 & \text{dans le cas contraire } ^1). \end{cases}$$

On voit aussi que les éléments inversibles de  $\mathcal{A}_2$  sont les fonctions  $f$  pour lesquelles

$$(1) \quad f(1, 1) \neq 0.$$

En effet, d'après la définition de la convolution, pour que  $f * g = e_2$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \quad \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right) = e_2(m, n)$$

quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ .

Pour  $m = n = 1$ , ceci se réduit à

$$f(1, 1) g(1, 1) = 1,$$

et on voit ainsi que la condition (1) est nécessaire pour que  $f$  soit inversible.

<sup>1)</sup> Nous désignerons par  $e_1$  l'unité de  $\mathcal{A}_1$ . On a

$$e_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, \\ 0 & \text{pour } n > 1. \end{cases}$$

Si maintenant on a (1), on voit qu'il est possible de déterminer  $g$  de façon que l'on ait (2) quels que soient  $m$  et  $n \geq 1$ .

On détermine  $g(m, n)$  pour  $m$  et  $n$  quelconques  $\geq 1$  en utilisant une récurrence sur  $n$  et, pour chaque  $n$ , une récurrence sur  $m$ .

On détermine d'abord  $g(m, 1)$  pour tous les  $m \geq 1$  en prenant

$$(3) \quad g(1, 1) = \frac{1}{f(1, 1)}$$

puis, pour  $m > 1$ ,

$$(4) \quad g(m, 1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d|m \\ d>1}} f(d, 1) g\left(\frac{m}{d}, 1\right).$$

Ensuite,  $g(m, n)$  étant déjà déterminé pour  $n \leq q$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ , on détermine  $g(m, q+1)$  pour tous les  $m \geq 1$  en prenant

$$(5) \quad g(1, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d|q+1 \\ d>1}} f(1, d) g\left(1, \frac{q+1}{d}\right)$$

puis, pour  $m > 1$ ,

$$(6) \quad g(m, q+1) = -\frac{1}{f(1, 1)} \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|q+1 \\ d_1+d_2>2}} f(d_1, d_2) g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{q+1}{d_2}\right).$$

Il résulte de (3) et (4) que (2) a lieu pour  $n = 1$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ . Pour chaque  $q \geq 1$ , il résulte de (5) et (6) que (2) a lieu pour  $n = q+1$  et  $m$  quelconque  $\geq 1$ .

Naturellement, l'ensemble des éléments inversibles de  $\mathcal{A}_2$  est un groupe avec la convolution comme loi. Nous désignerons ce groupe par  $G_2$  et nous désignerons de même par  $G_1$  le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{A}_1$  (qui sont les fonctions arithmétiques telles que  $f(1) \neq 0$ ).

Dans  $\mathcal{A}_2$  comme dans  $\mathcal{A}_1$  nous désignerons par  $f^{-*}$  l'élément inverse de  $f$ , s'il existe.

### 3. $G_2$ PRODUIT DIRECT DE DEUX DE SES SOUS-GROUPES

$h_1$  et  $h_2$  étant deux fonctions de  $\mathcal{A}_1$ , nous désignerons par  $h_1 \otimes h_2$  la fonction  $h$  de  $\mathcal{A}_2$  définie par

$$h(m, n) = h_1(m) h_2(n).$$