

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 15 (1969)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DEUX EXEMPLES CLASSIQUES DE REPRÉSENTATION  
INTÉGRALE  
**Autor:** Choquet, Gustave  
**Kapitel:** 1. Rappel de propriétés des ensembles convexes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43205>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DEUX EXEMPLES CLASSIQUES DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Gustave CHOQUET

*A la mémoire de J. Karamata*

Nous présentons dans ce travail des démonstrations de deux beaux théorèmes classiques: celui de Bochner-Weil sur les fonctions de type positif, et celui de Bernstein sur les fonctions totalement monotones.

Ces démonstrations sont basées sur une idée commune, celle de représentation intégrale des points d'un ensemble convexe au moyen de ses points extrémaux.

Nous avons cherché, non pas à faire du neuf à tout prix, mais à unifier et simplifier des démonstrations antérieures <sup>1)</sup> pour qu'elles deviennent indépendantes d'outillages spécialisés, et soient ainsi plus accessibles. Nos démonstrations peuvent d'ailleurs être encore simplifiées si l'on se contente d'un cadre moins général.

## 1. RAPPEL DE PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES CONVEXES <sup>2)</sup>

a) Soit  $X$  un convexe compact d'un espace localement convexe séparé  $E$ , et soit  $Y$  une partie fermée de  $X$  contenant l'ensemble  $\mathcal{E}(X)$  des points extrémaux de  $X$ .

Il résulte du théorème de Krein-Milman que pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe au moins une mesure de Radon  $\mu$  positive de masse 1 portée par  $Y$  et de résultante  $x$ , c'est-à-dire que  $l(x) = \mu(l)$  pour tout  $l \in E'$ . Si pour tout  $x \in X$  cette mesure est unique,  $Y = \mathcal{E}(X)$  et  $X$  est un simplexe, c'est-à-dire peut être considéré comme la base du cône positif d'un espace vectoriel réticulé.

b) Soit maintenant  $C$  un cône convexe d'un espace vectoriel topologique; on appelle *chapeau* de  $C$  tout convexe compact  $X \subset C$  tel que

---

<sup>1)</sup> Pour la démonstration du théorème de Bochner-Weil, l'idée centrale n'est qu'une simplification d'une idée introduite par Bucy et Maltese [1].

<sup>2)</sup> Voir Choquet-Meyer [3].

$(C \div X)$  soit convexe. Tout élément extrémal  $x \neq 0$  de  $X$  appartient à une génératrice extrémale de  $C$ .

c) Si  $C$  est un cône convexe saillant, métrisable et faiblement complet, tout point  $x$  de  $C$  appartient à un chapeau de  $C$ , et pour tout borélien  $B$  de  $C$  qui rencontre toute génératrice extrémale de  $C$  hors de 0,  $x$  est résultante d'une mesure positive portée par  $B$ . D'autre part si, pour tout  $x$  cette mesure est unique,  $C$  est réticulé, et l'application qui à tout  $x \in B$  associe la génératrice qui le porte est une bijection de  $B$  sur l'ensemble des génératrices extrémales de  $C$ .

### LE THÉORÈME DE BOCHNER-WEIL POUR UN GROUPE DISCRET

Pour mieux éclairer le mécanisme de la démonstration générale, nous la ferons d'abord pour les groupes discrets.

Soit donc  $G$  un groupe abélien quelconque, et soit  $f$  une fonction à valeurs complexes sur  $G$ .

On dit que  $f$  est de *type positif* (ou définie positive) si pour toute famille finie  $(x_i)_{i \in I}$  de points de  $G$ , et toute famille  $(\alpha_i)_{i \in I}$  de nombres complexes,  $\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j)$  est un nombre réel positif.

Il est commode d'exprimer tout de suite cette propriété en termes de convolution, en utilisant les mesures discrètes  $\mu = \sum \alpha_i \varepsilon_{x_i}$  et  $\tilde{\mu} = \sum \bar{\alpha}_i \varepsilon_{-x_i}$ . La condition précédente devient alors:

$$(1) \quad \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j) = (\mu * \tilde{\mu})(f) \geq 0, \text{ ou encore } (\mu * \tilde{\mu} * f)(0) \geq 0.$$

En particulier, si on prend  $\mu = \varepsilon_0 + c\varepsilon_a$ , cette condition devient:

$$(2) \quad (1 + |c|^2) f(0) + cf(a) + \bar{c}f(-a) \geq 0.$$

Si on donne successivement à  $c$  les valeurs 0, 1,  $i$ ,  $-|f(a)|/f(a)$  (quand  $f(a) \neq 0$ ), un calcul élémentaire fournit les relations importantes:

$$(3) \quad f(0) \geq 0; \quad f(-x) = \overline{f(x)} \quad \text{et} \quad |f(x)| \leq f(0).$$

*Exemple.* Appelons *caractère* de  $G$  toute  $f$  à valeurs complexes sur  $G$ , bornée, non identiquement nulle, et vérifiant l'identité  $f(x+y) = f(x)f(y)$ .

Il est immédiat que  $f(0) = 1$ , que  $|f(x)| = 1$ , et que  $f(-x) = \overline{f(x)}$  pour tout  $x \in G$ . Il en résulte que: