DEUX EXEMPLES CLASSIQUES DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Gustave Choquet

A la mémoire de J. Karamata

Nous présentons dans ce travail des démonstrations de deux beaux théorèmes classiques: celui de Bochner-Weil sur les fonctions de type positif, et celui de Bernstein sur les fonctions totalement monotones.

Ces démonstrations sont basées sur une idée commune, celle de représentation intégrale des points d'un ensemble convexe au moyen de ses points extrémaux.

Nous avons cherché, non pas à faire du neuf à tout prix, mais à unifier et simplifier des démonstrations antérieures [1]) pour qu'elles deviennent indépendantes d'outillages spécialisés, et soient ainsi plus accessibles. Nos démonstrations peuvent d'ailleurs être encore simplifiées si l'on se contente d'un cadre moins général.

1. Rappel de propriétés des ensembles convexes [2])

a) Soit X un convexe compact d'un espace localement convexe séparé E, et soit Y une partie fermée de X contenant l'ensemble $\mathscr{E}(X)$ des points extrémaux de X.

Il résulte du théorème de Krein-Milman que pour tout point x de X, il existe au moins une mesure de Radon μ positive de masse 1 portée par Y et de résultante x, c'est-à-dire que $l(x) = \mu(l)$ pour tout $l \in E'$. Si pour tout $x \in X$ cette mesure est unique, $Y = \mathscr{E}(X)$ et X est un simplexe, c'est-à-dire peut être considéré comme la base du cône positif d'un espace vectoriel réticulé.

b) Soit maintenant C un cône convexe d'un espace vectoriel topologique; on appelle *chapeau* de C tout convexe compact $X \subset C$ tel que

---

1) Pour la démonstration du théorème de Bochner-Weil, l'idée centrale n'est qu'une simplification d'une idée introduite par Bucy et Maltese [1].

2) Voir Choquet-Meyer [3].

$(C \dot{-} X)$ soit convexe. Tout élément extrémal $x \neq 0$ de X appartient à une génératrice extrémale de C.

c) Si C est un cône convexe saillant, métrisable et faiblement complet, tout point x de C appartient à un chapeau de C, et pour tout borélien B de C qui rencontre toute génératrice extrémale de C hors de 0, x est résultante d'une mesure positive portée par B. D'autre part si, pour tout x cette mesure est unique, C est réticulé, et l'application qui à tout $x \in B$ associe la génératrice qui le porte est une bijection de B sur l'ensemble des génératrices extrémales de C.

Le théorème de Bochner-Weil pour un groupe discret

Pour mieux éclairer le mécanisme de la démonstration générale, nous la ferons d'abord pour les groupes discrets.

Soit donc G un groupe abélien quelconque, et soit f une fonction à valeurs complexes sur G.

On dit que f est de *type positif* (ou définie positive) si pour toute famille finie $(x_i)_{i \in I}$ de points de G, et toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de nombres complexes, $\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j)$ est un nombre réel positif.

Il est commode d'exprimer tout de suite cette propriété en termes de convolution, en utilisant les mesures discrètes $\mu = \Sigma \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ et $\tilde{\mu} = \Sigma \bar{\alpha}_i \varepsilon_{-x_i}$. La condition précédente devient alors:

$$\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j) = (\mu * \tilde{\mu})(f) \geqq 0\,, \text{ ou encore } (\mu * \tilde{\mu} * f)(0) \geqq 0\,. \tag{1}$$

En particulier, si on prend $\mu = \varepsilon_0 + c\varepsilon_a$, cette condition devient:

$$(1 + |c|^2) f(0) + cf(a) + \bar{c}f(-a) \geqq 0\,. \tag{2}$$

Si on donne successivement à c les valeurs 0, 1, i, $-|f(a)|/f(a)$ (quand $f(a) \neq 0$), un calcul élémentaire fournit les relations importantes:

$$f(0) \geqq 0; \quad f(-x) = \overline{f(x)} \quad \text{et} \quad |f(x)| \leqq f(0)\,. \tag{3}$$

Exemple. Appelons *caractère* de G toute f à valeurs complexes sur G, bornée, non identiquement nulle, et vérifiant l'identité $f(x+y) = f(x) f(y)$.

Il est immédiat que $f(0) = 1$, que $|f(x)| = 1$, et que $f(-x) = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in G$. Il en résulte que: