

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	14 (1968)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	SOMMES DE PUISSANCES $m^{\text{emes}}$ DANS LES ANNEAUX $\beta$ -ADIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTIERS ALGÉBRIQUES
<b>Autor:</b>	Joly, Jean-René
<b>Kapitel:</b>	2. Sommes de puissances $m^{\text{emes}}$ dans un anneau $\beta$ -adique
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-42351">https://doi.org/10.5169/seals-42351</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstiendrons de les envisager ici.

\*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à  $w(m; A)$ ,  $v(m; A)$  et  $A_m$  dans le cas où  $A$  est un anneau  $\mathfrak{P}$ -adique (paragraphe 2) et dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de  $v(m; A)$  une majoration explicite et indépendante de  $A$ , toujours dans le cas où  $A$  est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

## 2. SOMMES DE PUISSANCES $m^{ièmes}$ DANS UN ANNEAU $\mathfrak{P}$ -ADIQUE

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si  $p$  est un nombre premier, si  $q = p^f$  ( $f \geq 1$ ) est un nombre  $p$ -primaire et si  $m$  est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole  $[q; m]$  le plus petit nombre  $p$ -primaire  $p^g$  ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant  $g$  divise l'exposant  $f$ ;  
le quotient  $(p^f - 1)/(p^g - 1)$  divise l'entier  $m$ .

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

*Lemme (2.1).* Soit  $k = \mathbf{F}_q$  le corps fini à  $q = p^f$  éléments. Si  $m$  est un entier positif,  $k_m$  est égal au sous-corps de  $k$  contenant exactement  $[q; m]$  éléments:

$$k_m = \mathbf{F}_{[q; m]}.$$

\*

Ces préliminaires étant posés, désignons par  $A$  un anneau  $\mathfrak{P}$ -adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caracté-

ristiques à corps résiduel fini), et soient  $k$  le corps résiduel de  $A$ ,  $q = p^f$  le nombre d'éléments de  $k$  et  $e$  l'indice de ramification absolu de  $A$ .

*Théorème (2.2)* (voir [8], th. (2.19)). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $A = A_m$ ;
- (b)  $k = k_m$ , et *de plus*, si  $p$  divise  $m$ ,  $A$  est absolument non-ramifié.

Compte tenu du lemme (2.1), l'égalité  $A = A_m$  équivaut donc à la condition « numérique » ci-dessous :

- (c)  $[q; m] = q$ , et *de plus*, si  $p$  divise  $m$ ,  $e = 1$ .

Ajoutons deux choses : tout d'abord, dans un anneau  $\mathfrak{P}$ -adique,  $-1$  est toujours somme de puissances  $m^{iemes}$  (voir par exemple [8], th. (6.19)) : l'égalité  $A = A_m$  implique donc en fait que tout élément de  $A$  est somme de puissances  $m^{iemes}$ ; par ailleurs, même lorsque  $A \neq A_m$ ,  $A_m$  est un anneau local, séparé, complet, de dimension 1 (mais non intégralement clos), et  $A$  est un  $A_m$ -module de type fini (voir [8], prop. (3.14)).

\*

*Théorème (2.3)* (voir [9], prop. 3). On a la majoration suivante, indépendante de l'anneau ( $\mathfrak{P}$ -adique)  $A$  :

$$w(m; A) \leq 8m^5.$$

Signalons que Birch a donné, par une méthode complètement différente, la majoration (également indépendante de  $A$ )  $w(m; A) \leq m^{16m^2}$ ; par ailleurs, nous avons prouvé nous-même que si  $m$  est premier impair, on a la majoration plus précise  $w(m; A) \leq 2m - 1$  (voir respectivement [3], th. 1, et [8], th. (7.34)).

### 3. SOMMES DE PUISSANCES $m^{iemes}$ DANS UN ANNEAU D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

Soient maintenant  $A$  un anneau d'entiers algébriques,  $K$  le corps des fractions de  $A$ , et  $d$  le discriminant de  $K$ ; pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , convenons de désigner par  $c_p$  la caractéristique de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ , par  $e_p$  et  $f_p$  l'indice de ramification absolu et le degré résiduel absolu de  $A_p$ , et par  $N\mathfrak{p}$  le nombre d'éléments de  $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$ ; on a donc  $N\mathfrak{p} = c_p f_p$ .