**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 14 (1968)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOMMES DE PUISSANCES m iemes DANS LES ANNEAUX ß-ADIQUES ET LES ANNEAUX D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

**Autor:** Joly, Jean-René

**Kapitel:** 2. Sommes de puissances m iemes dans un anneau ß-adique

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-42351

d'années l'objet de travaux fort nombreux; mais ces travaux reposent presque exclusivement sur l'application de techniques *analytiques* (en fait, diverses généralisations et améliorations des méthodes de Hardy et Littlewood) et, faute de compétence suffisante en ce domaine, nous nous abstiendrons de les envisager ici.

*

En fait, le but de ce court article est de résumer les résultats actuellement connus (connus de l'auteur, bien entendu) relatifs à $w(m; A)$, $v(m; A)$ et $A_m$ dans le cas où $A$ est un anneau $\mathfrak{P}$-adique (paragraphe 2) et dans le cas où $A$ est un anneau d'entiers algébriques (paragraphe 3), puis de les compléter en donnant de $v(m; A)$ une majoration explicite et indépendante de $A$, toujours dans le cas où $A$ est un anneau d'entiers algébriques (théorème (3.3), démontré au paragraphe 4); ce dernier résultat est une conséquence presque immédiate d'un résultat de Ramanujam (th. (2.3)) dont la démonstration, donnée dans [9], est d'ailleurs longue et délicate.

## 2. Sommes de puissances $m^{iemes}$ dans un anneau $\mathfrak{P}$-adique

Pour des raisons de commodité, adoptons une notation: si $p$ est un nombre premier, si $q = p^f$ $(f \geqq 1)$ est un nombre $p$-primaire et si $m$ est un entier positif quelconque, nous désignerons par le symbole $[q; m]$ le plus petit nombre $p$-primaire $p^g$ ayant les deux propriétés suivantes:

l'exposant $g$ divise l'exposant $f$;
le quotient $(p^f - 1)/(p^g - 1)$ divise l'entier $m$.

On a alors ce résultat élémentaire (pour une démonstration, voir par exemple [8], th. 2.3)):

*Lemme (2.1).* Soit $k = \mathbf{F}_q$ le corps fini à $q = p^f$ éléments. Si $m$ est un entier positif, $k_m$ est égal au sous-corps de $k$ contenant exactement $[q; m]$ éléments:

$$k_m = \mathbf{F}_{[q;\, m]} .$$

*

Ces préliminaires étant posés, désignons par $A$ un anneau $\mathfrak{P}$-adique (c'est-à-dire un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques à corps résiduel fini), et soient $k$ le corps résiduel de $A$, $q = p^f$ le nombre d'éléments de $k$ et $e$ l'indice de ramification absolu de $A$.

*Théorème (2.2)* (voir [8], th. (2.19)). Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(a) $A = A_m$;
(b) $k = k_m$, et *de plus*, si $p$ divise $m$, $A$ est absolument non-ramifié.

Compte tenu du lemme (2.1), l'égalité $A = A_m$ équivaut donc à la condition « numérique » ci-dessous:

(c) $[q; m] = q$, et *de plus*, si $p$ divise $m$, $e = 1$.

Ajoutons deux choses: tout d'abord, dans un anneau $\mathfrak{P}$-adique, $-1$ est toujours somme de puissances $m^{iemes}$ (voir par exemple [8], th. (6.19)): l'égalité $A = A_m$ implique donc en fait que tout élément de $A$ est somme de puissances $m^{iemes}$; par ailleurs, même lorsque $A \neq A_m$, $A_m$ est un anneau local, séparé, complet, de dimension 1 (mais non intégralement clos), et $A$ est un $A_m$-module de type fini (voir [8], prop. (3.14)).

*

*Théorème (2.3)* (voir [9], prop. 3). On a la majoration suivante, indépendante de l'anneau ($\mathfrak{P}$-adique) $A$:

$$w\,(m; A) \leqq 8m^5.$$

Signalons que Birch a donné, par une méthode complètement différente, la majoration (également indépendante de $A$) $w\,(m; A) \leqq m^{16m2}$; par ailleurs, nous avons prouvé nous-même que si $m$ est *premier impair*, on a la majoration plus précise $w\,(m; A) \leqq 2m-1$ (voir respectivement [3], th. 1, et [8], th. (7.34)).

## 3. Sommes de puissances $m^{iemes}$ dans un anneau d'entiers algébriques

Soient maintenant $A$ un anneau d'entiers algébriques, $K$ le corps des fractions de $A$, et $d$ le discriminant de $K$; pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de $A$, convenons de désigner par $c_p$ la caractéristique de $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$, par $e_p$ et $f_p$ l'indice de ramification absolu et le degré résiduel absolu de $A_p$, et par $N\mathfrak{p}$ le nombre d'éléments de $A/\mathfrak{p} = A_p/\mathfrak{p}A_p$; on a donc $N\mathfrak{p} = c_p{}^f p$.