

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 14 (1968)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COMPACT ANALYTICAL VARIETIES  
**Autor:** Narasimhan, Raghavan

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-42344>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Here  $L(z-a)$  is the Levi form of  $p$  at the point  $a$ . Now, since  $p$  is strongly plurisubharmonic, we can choose the coordinates so that  $L(z-a) = |z-a|^2$ . Then we see that if  $\zeta$  is an eigenvector corresponding to an eigenvalue  $< 0$  of the symmetric matrix of the real quadratic form  $\operatorname{Re} Q(z) + L(z)$ , then  $i\zeta$  is an eigenvector corresponding to an eigenvalue  $> 0$ . Hence the number of negative eigenvalues is  $\leq d$ , since the real dimension of  $X$  is  $2d$ . Thus the index of the critical point  $a$  is  $\leq d$ .

Now using Lemma 7.3 (b), we see that

$$H_r(U_\beta, \mathbf{Z}) = 0, \quad (\forall r > d).$$

From this it follows that

$$H_r(X, \mathbf{Z}) = 0, \quad (\forall r > d),$$

because the singular cycles defining the homology groups  $H_r(X, \mathbf{Z})$  have compact supports, and any compact subset of  $X$  is contained in some compact set  $K$  with a corresponding  $U_\beta \supset K$ .

A refinement of the above argument leads to the stronger (homotopy) statement:

*Any Stein manifold of (complex) dimension  $d$  has the same homotopy type as a CW complex of (real) dimension  $\leq d$ . (See [6]).*

Moreover, the Lefschetz theorem has an analogue in homology and in homotopy [6]. The latter, for example, asserts that, if  $V, D$  are as in Th. 7.1, then the relative homotopy groups  $\pi_q(V, D) = 0$  for  $q < d$ .

Th. 7.2 has been generalised in various directions. It has a relative analogue (relative to a Runge domain). Further, Th. 7.2 remains true if  $X$  is any Stein space (with singularities) of complex dimension  $d$ , but the corresponding cohomology statement is proved only for some other coefficient groups [5, 7]. Note that in view of the use of Poincaré duality, this does not lead to a Lefschetz theorem for algebraic varieties with singularities.

#### REFERENCES

- [1] ANDREOTTI, A. and FRANKEL, Theodore, The Lefschetz theorem on hyperplane sections. *Ann. of Math.* 69 (1959), 713-717.
- [2] GRAUERT, H., Ueber Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.* 146 (1962), 331-368.
- [3] GRAUERT, H., and REMMERT, R., Bilder und Urbilder analytischer Garben. *Ann. of Math.* 68 (1958), 393-443.
- [4] HÖRMANDER, L., *An introduction to complex analysis in several variables*. Van Nostrand, 1966.

- [5] KAUP, L., Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume, *Göttinger Nachrichten*, (1966) 213-224.
- [6] MILNOR, J., *Morse Theory*, Annals of math. Studies, no. 51.
- [7] NARASIMHAN, R., On the homology groups of Stein spaces, *Inventiones Math.* 2 (1967), 377-385.
- [8] DE RHAM, G., *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

(Reçu en mars 1968.)

Institut de Mathématiques  
Université de Genève.