Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSES DE CHERN D'UN ESPACE HOMOGÈNE PRESQUE COMPLEXE

Autor: Maumary, S.

Kapitel: Appendice: le principe de clivage

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42358

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Preuve : Il suffit de se rappeler que ξ^J est associé au U-fibré principal G_U par la représentation ι^J de U, et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

Convention d'écriture : On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_\alpha^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1-\alpha_{\mathbf{R}}^J).$$

Exemple :

Reprenons $P\mathbf{C}^n$ (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_\alpha - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = \prod_{\alpha>1}(1+x_1-x_\alpha)$. Considérons $\mathbf{C}^{n+1}$ comme fibré vectoriel ζ sur un point a. En composant $q : U_{n+1}/T \to P\mathbf{C}^n$ avec l'application constante $s : P\mathbf{C}^n \to a$, on obtient l'application constante $r : U_{n+1}/T \to a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod_{i=1}(1-x_i)$. Donc $\prod(1-x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod(X-x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A. En substituant $1 + x_1$ à X, on obtient $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = (1+x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec ξ' de rang 1, puisque ξ est associé à un $U_1 \times U_n$ – fibré principal par ι^J, et ξ' n'est autre que $r^*\zeta$, c'est-à-dire par construction γ. Donc $x_1 = q^*(t)$, où t engendre $H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z})$. Comme q^* est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(P\mathbf{C}^n) = (1+t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

Appendice: le principe de clivage

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace connexe X. Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de ξ, ainsi que la projection $q : P(\xi) \to X$ induite par $\pi : E(\xi) \to X$.

Alors:

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré λ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$;

2) $q^* : H^*(X) \to H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \hat{\otimes} \eta$ sur $X \times P\mathbf{C}^k$, $k \geq n$, où η est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur $P\mathbf{C}^k$. Si $(\xi \hat{\otimes} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application

$f : (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \to P(\xi)$ associant à $x \otimes z$ la droite passant par xz dans ξ. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 & \xrightarrow{f} & P(\xi) \\ \pi \times \pi' \Big\downarrow & & \Big\downarrow q \\ X \times P\mathbf{C}^k & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

est évidemment commutatif. On va montrer que $(p \circ (\pi \times \pi'))^*$ est injectif, ce qui impliquera 2) en vertu de la relation $f^* \circ q^* = (p \circ (\pi \times \pi'))$. Ecrivons la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel $\xi \hat{\otimes} \eta$:

$$H^{i-2n}(X \times P\mathbf{C}^k) \xrightarrow[\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)]{\text{mult. par}} H^i(X \times P\mathbf{C}^k) \xrightarrow{(\pi \times \pi')^*}$$

$$\longrightarrow H^i(\xi \hat{\otimes} \eta)_o \to H^{i-2n+1}(X \times P\mathbf{C}^k)$$

Comme $H^*(X \times P\mathbf{C}^k) \approx H^*(X)[t]/t^{k+1}$ en vertu de la formule de Künneth (c'est ici que les coefficients entiers jouent un rôle) et p^* applique $H^i(X)$ identiquement sur les constantes de degré total i dans $H^*(X)[t]/t^{k+1}$, on doit donc montrer que ces dernières ne sont pas divisibles par $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)$, en utilisant l'exactitude de la suite ci-dessus. Ecrivons $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = a_n + a_{n-1} t + \ldots + a_0 t^n$ avec $a_i \in H^{2(n-i)}(X)$. Si x est un point de X, alors $\xi \hat{\otimes} \eta \,|\, x \times P\mathbf{C}^k \approx \mathbf{C}^n \hat{\otimes} \eta \approx \eta \oplus \ldots \oplus \eta$, par naturalité de la classe d'Euler, l'injection $i : x \times P\mathbf{C}^k \to X \times P\mathbf{C}^k$ vérifie $i^* \chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta \hat{\oplus} \oplus \ldots \oplus \eta) = t^n$, puisque $X(\eta) = t$ par définition. Mais $i^*(a_j) = 0$ pour $j > 0$ et $i^*(a_0) = a_0$, donc $a_0 = 1$. Cela implique la non divisibilité en question.

En faisant subir à ξ' la même opération qu'à ξ, et ainsi de suite, on obtient:

si $D(\xi)$ désigne l'espace des drapeaux de ξ, formé des suites ordonnées de n droites linéairement indépendantes dans les fibres de ξ, et $q : D(\xi) \to X$ la projection induite par celle de ξ, alors:

1) $q^*\xi \approx \bigoplus_{i=1} \lambda_i$ avec rang $\lambda_i = 1$;

2) $q^* : H^*(X) \to H^*(D(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Remarques :

1) $D(\xi)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $DU(\xi)$ des suites ordonnées de n droites orthogonales dans les fibres de ξ, relativement à un

produit scalaire quelconque dans ξ, paramétré par les fibres. Si P est le U_n-fibré principal formé par les bases orthonormées de ξ, alors $DU(\xi) = E(P)/T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_1 \end{pmatrix}.$$

2) Le principe de clivage reste valable pour les fibrés vectoriels réels, à condition de remplacer les coefficients entiers par Z_2. En effet, dans la démonstration ci-dessus, on doit remplacer $P\mathbf{C}^k$ par $P\mathbf{R}^k$ et la formule de Künneth ne reste juste que pour les coefficients Z_2. (Rappelons que $H^i(P\mathbf{R}^k; \mathbf{Z}) \approx Z_2$ pour i impair $<$ k).

RÉFÉRENCES

[1] CHEVALLEY, C. *Theory of Lie groups.*

[2] SERRE, J.-P. *Algèbres de Lie semi-simples complexes.*

[3] HUSEMOLLER, D. *Fibre bundles.*

[4] BOREL, A. and F. HIRZEBRUCH. « Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III ». *Am. J. of Math. 1958, 59, 60.*

[5] STEENROD, N. *The topology of fibre bundles.*

(Reçu le 18 mars 1969)

Serge Maumary
Institute for Advanced Studies
Princeton, New-Jersey
U. S. A.