Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT

HOLOMORPH-REGULÄR SEIN

Autor: Wiegmann, Klaus-Werner

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42355

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

EIN HOLOMORPH-SEPARABLER KOMPLEXER RAUM MUSS NICHT HOLOMORPH-REGULÄR SEIN

von Klaus-Werner WIEGMANN

In der Arbeit [2, Satz 2*] wird bewiesen, dass ein komplexer Raum genau dann lokal-holomorph-separabel ist, wenn eine holomorph-reguläre komplexe Unterstruktur mit gleicher globaler Funktionenalgebra existiert. Es entsteht die Frage, ob nicht schärfer gilt, dass jeder holomorph-separable komplexe Raum selbst holomorph-regulär ist. Doch dazu geben wir das folgende Gegenbeispiel an:

Wir betrachten das Gebiet

$$X: = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \neq 1 \text{ oder } z_2 \neq 0\}$$

mit der üblichen komplexen Struktur $\mathcal{O} := {}_{2}\mathcal{O} \mid X$. Die Holomorphiehülle von (X, \mathcal{O}) ist $(\mathbb{C}^{2}, {}_{2}\mathcal{O})$, und es gilt:

$$\mathcal{O}(X) = {}_{2}\mathcal{O}(C^{2}) = \overline{C[z_{1}, z_{2}]};$$

die abgeschlossene Hülle in $_2\mathcal{O}\left(C^2\right)$ wird dabei bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz gebildet. Es sei

$$M := \{ (z_1, z_2) \in X : z_2 = 0 \quad und \quad |z_1| < 1 \}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe in der z_1 -Ebene des C^2 . M ist eine analytische Menge in (X, \mathcal{O}) . Eine Garbe \mathcal{A} auf X definieren wir folgendermassen:

$$\mathscr{A}\left(U\right) := \left\{ f \in \mathscr{O}\left(U\right) : f_{(a,o)} \in C\left[\left\langle z_{1} - a, z_{2}^{2}, z_{2}^{3} \right\rangle\right] \quad (a,0) \in M \cap U \right\},$$

falls $U \subset X$ offen ist. Es gilt:

$$\mathcal{A}_{x} = \begin{cases} \mathbf{C} \left[\langle z_{1} - a, z_{2}^{2}, z_{2}^{3} \rangle \right] & \text{für } x = (a, 0) \in M \\ \emptyset_{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass (X, \mathcal{A}) ein komplexer Raum ist.

Dazu müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $x = (a, 0) \in M$ und $x = (x_1, x_2) \in X - M$.

$$U: = \{(z_1, z_2) \in X: |z_1| < 1\}$$

ist eine offene Umgebung von (a, 0), und $(U, \mathcal{A}|U)$ ist direktes Produkt

des $(C^1, {}_1\mathcal{O})$ mit der Neilschen Parabel (auf die offene Einheitskreisscheibe beschränkt).

$$V := \{(z_1, z_2) \in X : z_2 \neq 0 \quad oder \mid z_1 \mid > 1\} = X / M$$

ist eine offene Umgebung von (x_1, x_2) mit $(V, \mathcal{A}|V) = (V, \mathcal{O}|V)$, q.e.d.

Die globalen holomorphen Funktionen $\mathscr{A}(X) = \overline{C[z_1, z_2^2, z_2^3]}$ trennen die Punkte von X, erzeugen aber keinen Cotangentialraum

$$T_x(X, \mathscr{A}) = \mathfrak{m}(\mathscr{A}_x)/\mathfrak{m}(\mathscr{A}_x)^2, x = (b, 0) \in X/M;$$

denn für solche x gilt $\mathscr{A}_x = \mathscr{O}_x$ und deshalb $T_x(X, \mathscr{A}) = T_x(X, \mathscr{O})$.

Damit ist gezeigt, dass (X, \mathcal{A}) holomorph-separabel, aber nicht holomorph-regulär ist.

BEMERKUNGEN

- 1. Es gibt kein eindimensionales Beispiel dieser Art, weil jeder eindimensionale komplexe Raum ohne kompakte irreduzible Komponenten Steinsch, insbesondere holomorph-regulär ist.
- 2. Unser Beispiel zeigt ausserdem: Ein komplexer Raum X, der eine Steinsche Holomorphiehülle X besitzt, so dass die zugehörige Abbildung $X \to X$ injektiv ist, braucht nicht Teilraum dieser Hülle zu sein.
- 3. Übrigens ist für einen prä-Steinschen Raum die zugehörige holomorphe Abbildung in die Holomorphiehülle genau dann injektiv, wenn er holomorph-separabel ist. In beiden Fällen ist diese Abbildung sogar offen. Das folgt etwa aus [1, § 1] und [2, Satz 2].

LITERATUR

- [1] Forster, O., Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln, Math. Z. 97, 376-405 (1967).
- [2] Wiegmann, K.-W., Strukturen auf Quotienten komplexer Räume. Comm., Math. Helv. 44, 93-116 (1969).

(15. März 1969)

Mathematisches Institut der Universität München Schellingstr. 2- 8.