

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	14 (1968)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR UNE CLASSE DE PROPRIÉTÉS COMMUNES A QUELQUES TYPES DIFFÉRENTS D'ALGÈBRES
<b>Autor:</b>	Nijenhuis, Albert
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-42353">https://doi.org/10.5169/seals-42353</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR UNE CLASSE DE PROPRIÉTÉS COMMUNES A QUELQUES TYPES DIFFÉRENTS D'ALGÈBRES.

par Albert NIJENHUIS \*

*Traduit par R. Bantegnie*

## INTRODUCTION

Le développement de l'algèbre moderne dans les quarante dernières années a conduit à de nombreuses notions nouvelles comme celles de groupe, d'anneau et de corps. Algèbre linéaire est devenu un mot domestique. L'algèbre multilinéaire qui trouve ses racines dans la théorie matricielle et dans l'analyse tensorielle a pris dans les années récentes des formes nouvelles plus simples et est devenue un outil commun de l'algèbre moderne.

Parmi les concepts les plus utilisés est celui d'*algèbre*; il combine une structure d'espace vectoriel et une structure multiplicative. Bien connues sont les algèbres associatives (qu'elles soient commutatives ou non); elles sont des généralisations directes du système numérique et comprennent les matrices. Les Algèbres de Lie sont plus récentes; leur origine est la théorie des groupes continus mais elles ont trouvé de nombreuses applications dans d'autres domaines. Les algèbres de Vinberg sont moins connues et sont discutées ici pour montrer que le thème de cet article ne se restreint pas de lui-même au cas d'algèbres qui sont déjà bien connues.

Les algèbres que nous considérons sont toutes caractérisées par le fait que les constantes de structure sont restreintes par des conditions linéaires (p. ex. la symétrie gauche) et par des conditions quadratiques (p. ex. l'associativité ou l'identité de Jacobi). Cependant, les restrictions doivent être d'une sorte particulière: elles doivent pouvoir s'exprimer sous une forme particulière à l'aide d'un *système de composition* convenable. Cette notion de système de composition est seulement développée lentement le long de l'article et sa définition n'intervient pas avant la section finale.

Comme le but de cet article est purement d'exposition, l'auteur a essayé de compter sur assez peu de matériel déjà connu. Le plus important est

\*) Cet article a paru en anglais dans Nieuwe Archief voor Wiskunde, XVII, 17-46, 87-108, 1969.

l'algèbre linéaire; les notions de groupe, d'idéal, d'espace quotient et les notions analogues sont utilisées (assez clairement).

L'article est partagé en trois parties et est organisé de telle façon que chacune des parties a sa propre récompense. La première, la plus élémentaire, discute de façon assez informelle certaines propriétés des algèbres associatives, des algèbres de Lie et des algèbres de Vinberg. La discussion des deux premières sert à motiver les concepts concernant les dernières. Les modules sur ces algèbres sont aussi introduits.

La partie II utilise exclusivement les algèbres associatives. On montre comment la considération des applications multilinéaires de l'espace vectoriel sous-jacent dans lui-même et l'introduction d'une opération pour ces applications, le produit de composition, fournit déjà la clé d'une foule de notions, depuis les commutateurs jusqu'aux extensions à la cohomologie et finalement aux déformations. Un exemple simple de déformation est donné explicitement.

La partie III commence par introduire les produits de composition associés aux algèbres de Lie et aux algèbres de Vinberg. Ensuite, l'histoire de la partie II s'applique aussi bien presque mot par mot à ces deux types. Comme illustration, on démonte une algèbre de Lie. Ensuite, d'autres opérations sont construites, fondées uniquement sur le produit de composition et donc valables pour les trois types d'algèbres. Les domaines d'application englobent les déformations d'homomorphismes et de sous-algèbres. La dernière section donne sous une forme quelque peu plus explicite et formelle quelques propriétés du produit de composition qui jusqu'ici ont été utilisées de façon assez informelle. S'ensuit la définition d'un système de composition.

Vu cette manière de faire, on peut lire l'article seulement pour voir quelques propriétés générales des algèbres associatives ou des algèbres de Lie, ou on peut vouloir voir comment une algèbre « drôle » peut encore être tout à fait raisonnable. La lecture de la partie I suffira alors. (Le fait que les algèbres de Jordan, du à la nature cubique des conditions portant sur les constantes de structure, ne soient pas comprises est regrettable, mais des développements futurs peuvent remédier à cette situation.) Pareillement, si l'on est curieux au sujet des déformations des algèbres associatives, ou si l'on veut voir une approche simple de la cohomologie, la partie II suffira. Finalement, la partie III étend la cohomologie et les déformations d'algèbres associatives aux algèbres de Lie et aux algèbres de Vinberg. Elle donne aussi des renseignements sur d'autres problèmes de déformation concernant ces trois types d'algèbres. Finalement, elle érige des critères pour que valent les mêmes résultats pour d'autres types — peut-être encore inconnus — d'algèbres.

La matière de cet article a été puisée à différentes sources. L'inclusion dans le texte de notes bibliographiques n'a pas semblé pratique: à la place, chaque partie se termine par quelques-unes de ces notes dans une section séparée. En allant aux sources indiquées, le lecteur trouvera des discussions plus complètes des sujets traités et aussi d'autres sujets qui bien que liés n'ont pu être mentionnés par manque de place.

Je considère comme un honneur de dédier cet article à J.A. Schouten, à l'occasion de son 85<sup>e</sup> anniversaire, et en reconnaissance de sa contribution à la théorie des invariants tensoriels. Il y a quelque dix ans son approche a contribué de façon substantielle à éclaircir le terrain de la théorie de la déformation.

## PARTIE I : *Quelques types d'algèbres*

### 1. *Algèbres associatives et algèbres de Lie.*

La propriété caractéristique d'une algèbre est que l'ensemble sous-jacent de ses éléments  $V$  a la structure d'un espace vectoriel (nous nous bornerons de façon constante au cas de la dimension finie et au cas réel). La structure additive de  $V$  fournit l'addition de l'algèbre. La multiplication s'exprime en donnant une application  $\mu : V \times V \rightarrow V$ . En accord avec la structure d'espace vectoriel de  $V$  nous supposerons toujours que  $\mu$  est bilinéaire (c.-à-d. que  $\mu(x, y)$  est linéaire séparément en  $x$  et en  $y$ ). Les propriétés de  $V$  et de  $\mu$  assurent alors que l'addition est commutative et associative, et que l'addition et la multiplication vérifient les lois distributives.

L'application produit  $\mu$  est entièrement déterminée par un ensemble de constantes de structure  $(c_{ij}^k)$ : soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ , alors pour chaque  $i$  et  $j$  entre 1 et  $n$ ,  $\mu(e_i, e_j)$  est un élément de  $V$  et ses composantes  $c_{ij}^1, \dots, c_{ij}^n$  sont les constantes de structure:

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_k c_{ij}^k e_k.$$

Tout ce qui est dit à l'aide de  $\mu$  peut être reformulé à l'aide des constantes de structure.

Jusqu'ici rien n'a été dit sur l'associativité de la multiplication, ou sur quelque autre propriété du produit.

En fait, la définition générale d'une algèbre n'englobe aucune condition de ce type. Naturellement, cependant, les algèbres sont appelées commutatives si  $xy = yx$ , associatives si  $x(yz) = (xy)z$ . D'autres possibilités sont mentionnées plus tard. Alors que les algèbres commutatives et associatives ont été les plus importantes et que de nombreux développements modernes

très fameux dépendent lourdement d'elles, elles ne sont pas particulièrement intéressantes de notre point de vue assez particulier. Quoique nous pourrions les inclure, nous ne leur attacherons, par souci de brièveté, aucune attention particulière.

Les algèbres associatives sont assez bien connues. L'exemple le plus classique est peut-être celui des matrices réelles  $n \times n$ , avec le produit usuel lignes par colonnes. Parmi les sous-algèbres nous avons par exemple les matrices avec seulement des zéros en-dessous de la diagonale principale; nous les appellerons triangulaires supérieures. Un autre exemple fameux est formé par les quaternions. Les nombres complexes forment un exemple qui se trouve être commutatif. Les dimensions des exemples sont respectivement  $n^2$ ,  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , 4 et 2. Tandis que dans les algèbres les produits sont habituellement désignés par un point:  $x \cdot y$  ou par « rien »:  $xy$ , nous utiliserons explicitement  $\mu(x, y)$  quand cela sera commode pour quelque dessein. Avec cette notation, la condition d'associativité devient

$$\mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z)) = 0.$$

Les algèbres de Lie ont trouvé leur origine ou du moins leur utilité initiale dans des domaines près par tradition des applications physiques. Leur respectabilité mathématique s'est accrue grandement quand elles eurent perdu leur nom d'origine de « groupe infinitésimal ». Tout groupe de Lie (groupe continu) a son algèbre de Lie. Le dernier concept est beaucoup moins compliqué que le premier; cependant de nombreuses propriétés du groupe trouvent de fortes images dans l'algèbre. Parmi les exemples les plus simples d'algèbre de Lie citons, par exemple, les matrices  $n \times n$  avec comme produit  $\mu(x, y) = xy - yx$ , les matrices antisymétriques avec le même produit, et l'espace euclidien à 3 dimensions avec le produit « croisé ». En fait, ces algèbres de Lie peuvent être associées aux groupes suivants: le groupe de toutes les matrices inversibles  $n \times n$ , le groupe des matrices orthogonales  $n \times n$  et le groupe des rotations de l'espace à 3 dimensions. Leurs dimensions respectives sont  $n^2$ ,  $\frac{1}{2}n(n-1)$  et 3.

La définition d'une algèbre de Lie est simple: le produit est antisymétrique et vérifie l'identité appelée identité de Jacobi. Au moyen de  $\mu$  cela signifie que

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= -\mu(y, x), \quad \mu(\mu(x, y), z) + \mu(\mu(y, z), x) + \\ &\quad + \mu(\mu(z, x), y) = 0. \end{aligned}$$

De façon traditionnelle, le produit d'une algèbre de Lie est noté par des crochets  $[x, y]$ . Les puristes insistent pour que ce soit  $xy$  puisqu'on utilise

aussi  $xy$  quand le produit ne vérifie aucune condition particulière. Pour satisfaire au moins partiellement les puristes nous utiliserons les crochets seulement pour les commutateurs (c.-à-d.  $[x, y] = xy - yx$ ) et pour certaines algèbres de Lie graduées qui apparaîtront dans les parties II et III. Dans les autres cas, nous éviterons la controverse en utilisant  $\mu$ .

## 2. Les algèbres de Vinberg.

L'application produit  $\mu$  d'une algèbre de Vinberg vérifie la condition suivante

$$(1) \quad \mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z)) - \mu(\mu(y, x), z) + \mu(y, \mu(x, z)) = 0,$$

ou, avec des notations moins conventionnelles où  $xy = \mu(x, y)$

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz).$$

Avec encore d'autres notations: si  $L_x$  désigne la multiplication à gauche par  $x$ ,  $L_xy = xy = \mu(x, y)$  de telle sorte que  $L_x$  est une application linéaire de  $V$  dans  $V$ , on peut écrire la condition sous la forme

$$L_x L_y - L_y L_x = L_{xy-yx}.$$

Si nous introduisons des commutateurs notés par des crochets, nous obtenons

$$(1') \quad [L_x, L_y] = L_{[x, y]}.$$

La dernière forme de la condition suggère déjà que les algèbres de Vinberg sont liées de près aux algèbres de Lie. De façon plus précise, nous avons le

**THÉORÈME.** *Si  $V$  est un espace vectoriel et  $\mu$  une application bilinéaire de  $V$  dans  $V$  qui vérifie la condition (1) et si, de plus,  $\hat{\mu}(x, y) = \mu(x, y) - \mu(y, x)$ , alors  $\hat{\mu}$  définit une structure d'algèbre de Lie.*

Le théorème généralise le fait bien connu que les commutateurs d'une algèbre associative donnent une algèbre de Lie. La vérification pour  $\hat{\mu}$  de l'identité de Jacobi (c'est tout ce qui est à prouver) suit directement de l'écriture et du regroupement des 12 termes que l'on trouve.

Dans la pratique, les algèbres de Vinberg apparaissent dans l'autre sens. Tout d'abord on a trouvé une structure d'algèbre de Lie; ensuite on essaye de trouver une structure plus fine pour laquelle les commutateurs donnent la structure première d'algèbre de Lie. On peut préférer trouver des struc-

tures d'algèbre associative mais c'est à vrai dire un problème plus difficile — l'existence étant connue dans moins de cas — que celui que nous considérons ici. Le seul point qu'on peut ici noter est qu'une structure d'algèbre de Vinberg est plus fine qu'une structure d'algèbre de Lie et que les algèbres associatives en sont un cas particulier.

Quoique les algèbres de Vinberg viennent de situations géométriques où l'on considère certains ensembles ouverts convexes homogènes des espaces affines, nous ne nous intéresserons pas nous-mêmes à ces applications. A la place, nous donnons quelques exemples construits algébriquement d'algèbres de Vinberg.

Tout d'abord un exemple à 2 dimensions. Soit  $P, Q$  les vecteurs de base; le produit est donné alors par

$$\begin{array}{ll} \mu(P, P) = 2P & \mu(Q, P) = 0 \\ \mu(P, Q) = Q & \mu(Q, Q) = P \end{array}$$

La vérification de (1) est une simple question d'énumération de cas. Le produit de Lie pour les commutateurs est donné par  $\hat{\mu}(P, Q) = Q$ ; c'est le seul cas d'une algèbre de Lie non abélienne à deux dimensions. (Pour une structure d'algèbre de Lie sur un espace vectoriel à 2 dimensions ou bien on a une isomorphie avec la précédente ou bien tous les produits valent zéro.)

Pour le second exemple, considérons l'application  $\tau$  qui assigne à chaque matrice  $n \times n$  ( $n$  reste fixe) la matrice triangulaire supérieure obtenue en remplaçant les éléments sous la diagonale principale par zéro, en divisant les éléments de la diagonale principale par 2 et en laissant inchangés les éléments situés au-dessus de la diagonale principale. On désigne la transposée d'une matrice  $a$  par  $a^t$ . L'exemple consiste en matrices triangulaires supérieures notées  $x, y, \dots$  La dimension de l'espace est  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Le produit de l'espace est donné par

$$\mu(x, y) = xy + \tau(xy^t + yx^t).$$

Comme première observation, nous voyons que l'on a  $\hat{\mu}(x, y) = xy - yx$ , car l'expression du terme en  $\tau$  est symétrique en  $x$  et en  $y$ . Par suite la structure en question est un raffinement de la structure habituelle d'algèbre de Lie sur les matrices triangulaires supérieures.

La vérification de (1) est juste un peu intrigante quoiqu'il n'y ait pas de difficultés essentielles. Notons que pour prouver (1), nous devons montrer que  $\mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z))$  est symétrique en  $x$  et  $y$ .

Premièrement le premier terme.

$$\begin{aligned}\mu(\mu(x, y), z) &= \mu(x, y)z + \tau(\mu(x, y)z^t + z(\mu(x, y))^t) = \\ &= (xy)z + \tau(xy^t + yx^t)z + \tau((xy)z^t + \tau(xy^t + yx^t)z^t + \\ &\quad + z(xy)^t + z(\tau(xy^t + yx^t))^t) = xyz + \tau(xyz^t + zy^tx^t) + \text{sym}.\end{aligned}$$

où « sym » note une expression symétrique en  $x$  et  $y$ . Le second terme est écrit ainsi qu'il suit.

$$\begin{aligned}\mu(x, \mu(y, z)) &= x\mu(y, z) + \tau(x(\mu(y, z))^t + \mu(y, z)x^t) = \\ &= x(yz) + x\tau(yz^t + zy^t) + \tau(x(yz)^t + x(\tau(yz^t + zy^t))^t + \\ &\quad + (yz)x^t + \tau(yz^t + zy^t)x^t)\end{aligned}$$

Aux termes en  $\tau$  intérieurs aux termes en  $\tau$  nous appliquons les identités, valables quelles que soient les matrices symétriques  $s$ ,

$$\tau(s) = s - \tau(s)^t \quad \text{et} \quad \tau(s)^t = s - \tau(s).$$

Ces termes sont ainsi changés en

$$x(yz^t + zy^t) - x\tau(yz^t + zy^t) + (yz^t + zy^t)x^t - (\tau(yz^t + zy^t))^t x$$

C'est tout ce qui doit être placé à l'intérieur du premier opérateur  $\tau$ . Pour le second et le quatrième termes cela donne, vu l'égalité, valable pour toute matrice triangulaire supérieure  $w$ ,  $w = \tau(w + w^t)$

$$\tau(-x\tau(yz^t + zy^t) - (\tau(yz^t + zy^t))^t x^t) = -x\tau(yz^t + zy^t).$$

Ce dernier terme supprime un des termes précédents. Ainsi, en les mettant tous ensemble, on trouve

$$\begin{aligned}\mu(x, \mu(y, z)) &= xyz + \tau(xz^ty^t + yzx^t + x(yz^t + zy^t) + (yz^t + zy^t)x^t) \\ &= xyz + \tau(xyz^t + zy^tx^t) + \tau(xz^ty^t + yz^tx^t + yzx^t + xzy^t) \\ &= \mu(\mu(x, y), z) + \text{sym.},\end{aligned}$$

ce qu'on devait montrer.

### 3. *Modules.*

Les abstractions mathématiques, comme celles de groupe, d'anneau ou d'algèbre, sont venues historiquement comme opérations sur certains ensembles. Les ensembles, disons de cailloux, de moutons ou de femmes, étaient familiers longtemps avant les entiers qui les comptent. Les permutations sur les ensembles étaient connues avant le concept de groupe.

Les modules sont des ensembles convenablement structurés sur lesquels agissent des algèbres. Soit  $V$  une algèbre ayant pour produit  $\mu$ . Alors un module sur  $(V, \mu)$  est un espace vectoriel  $M$  sur lequel les éléments de  $V$  agissent de façon à respecter la structure d'espace vectoriel de  $M$ . La structure d'espace vectoriel de  $V$  doit aussi être respectée; et, de plus, la multiplication  $\mu$  de  $V$  doit être convenablement retrouvée. La discussion des exemples qui suivent rend tout cela plus précis.

Soit  $(V, \mu)$  une algèbre associative. Un espace vectoriel  $M$  est un *module à gauche* sur  $(V, \mu)$  si on s'est donné une application bilinéaire  $\lambda$ :

$V \times M \rightarrow M$  ( $\lambda(x, m)$  est aussi noté  $xm$ ) vérifiant

$$x(ym) = (xy)m ; \text{ c'est-à-dire } \lambda(x, \lambda(y, m)) = \lambda(\mu(x, y), m).$$

Notons que la bilinéarité implique les lois distributives habituelles. — Un *module à droite* est de façon analogue défini par une application bilinéaire  $\rho : M \times V \rightarrow M$  (on note  $mx$  en abrégé pour  $\rho(m, x)$ ) telle que

$$(mx)y = m(xy), \quad \text{ou} \quad \rho(\rho(m, x), y) = \rho(m, \mu(x, y)).$$

Une *structure de bimodule* est donnée par les applications  $\lambda$  et  $\rho$  comme ci-dessus, avec la condition additionnelle que les actions de gauche et de droite commutent; c'est-à-dire que

$$(xm)y = x(my), \quad \text{ou} \quad \rho(\lambda(x, m), y) = \lambda(x, \rho(m, y)).$$

En fait, les modules à gauche (et à droite) sont des cas particuliers des bimodules si on le souhaite: il suffit de poser  $\rho = 0$  (resp.  $\lambda = 0$ ). Nous nous limiterons donc aux bimodules quand nous le voudrons.

Le module (à gauche) sur l'algèbre associative des matrices  $n \times n$  historiquement le plus naturel est peut-être l'espace vectoriel  $R^n$  des  $n$ -uples de nombres réels.  $\lambda(x, m)$  est simplement le produit usuel ligne par colonne de la matrice  $x$  et du vecteur colonne  $m$ . Une structure de module à droite est donnée par  $\rho(m, x) = mx$ , où à nouveau on emploie le produit ligne par colonne et où  $m$  est un vecteur ligne. L'espace entier des matrices  $n \times n$  est lui-même un bimodule sur lui-même si on utilise les multiplications à droite et à gauche habituelles.

Le dernier commentaire est général: une algèbre associative est toujours un bimodule sur elle-même. De plus, les idéaux à gauche sont des modules à gauche, les idéaux à droite des modules à droite et les idéaux bilatères sont des bimodules.

Retournons à la définition d'un bimodule sur une algèbre associative et essayons de la simplifier en considérant d'un seul coup toutes les opéra-

tions:  $\mu$ ,  $\lambda$  et  $\rho$  et en les combinant en une seule application. A cette fin, considérons le produit direct  $W = V \times M$  dont les éléments sont les paires  $(x, m)$  d'éléments de  $V$  et de  $M$ .  $W$  est encore un espace vectoriel. Considérons l'application  $\bar{\mu} : W \times W \rightarrow W$  donnée par

$$(2) \quad \bar{\mu}((x, m), (y, n)) = (\mu(x, y), \lambda(x, n) + \rho(m, y)).$$

Elle est clairement bilinéaire.  $V \times M$  muni du produit  $\bar{\mu}$  est appelé *produit semi-direct* de  $V$  et de  $M$ . Pour examiner  $\bar{\mu}$ , écrivons  $x$  pour  $(x, 0)$  et  $m$  pour  $(0, m)$  (cela peut être fait sans risque de confusion si  $V$  et  $M$  sont des espaces distincts). Nous avons alors

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(x, y) &= \mu(x, y) & \bar{\mu}(m, y) &= \rho(m, y) \\ \bar{\mu}(x, m) &= \lambda(x, m) & \bar{\mu}(m, n) &= 0 \end{aligned}$$

Les conditions imposées à  $\mu$  (associativité),  $\lambda$  (structure de module à gauche) et à  $\rho$  (structure de module à droite) et la compatibilité de  $\lambda$  et de  $\mu$  peuvent maintenant être toutes exprimées au moyen de  $\bar{\mu}$ . La tâche est classique et le résultat est un théorème.

**THÉORÈME.** Soit  $V$  et  $M$  des espaces vectoriels,  $\mu : V \times V \rightarrow V$ ,  $\lambda : V \times M \rightarrow M$  et  $\rho : M \times V \rightarrow M$  des applications bilinéaires. Soit  $W = V \times M$  le produit semi-direct muni de  $\bar{\mu}$  défini par (2). Alors  $\bar{\mu}$  définit une structure d'algèbre associative sur  $W$  si et seulement si sont vérifiées les deux assertions suivantes : (1)  $\mu$  est une structure d'algèbre associative sur  $V$ ; (2)  $\lambda$  et  $\rho$  définissent sur  $M$  une structure de bimodule.

Une situation semblable se trouve dans le cas des algèbres de Lie, excepté que là il suffit de considérer uniquement les modules à gauche (ou à droite); d'autres cas peuvent être réduits à celui-là. De façon à ce que  $M$  soit un module sur l'algèbre de Lie  $(V, \mu)$  on doit se donner une application bilinéaire  $\lambda : V \times M \rightarrow M$  (on peut écrire  $xm$  pour  $\lambda(x, m)$ ) qui vérifie

$$\lambda(x, \lambda(y, m)) - \lambda(y, \lambda(x, m)) = \lambda(\mu(x, y), m),$$

ou

$$x(ym) - y(xm) = \mu(x, y)m.$$

Un module sur une algèbre de Lie est fréquemment appelé une représentation. De façon plus précise, si  $M$  est un module sur  $V$  (de produit  $\mu$ ) à l'aide de l'application  $\lambda$ , alors  $\lambda$  est appelé une représentation de  $(V, \mu)$  sur  $M$ .

On trouve facilement des exemples de modules sur des algèbres de Lie: chaque module sur une algèbre associative donne naissance à un tel module.

Toute algèbre de Lie de matrices (par exemple celle des matrices symétriques gauche) donne à  $R^n$  une structure de module si l'on prend le produit habituel ligne par colonne. Toute algèbre de Lie est un module sur elle-même. Les idéaux d'une algèbre de Lie sont aussi des modules sur l'algèbre de Lie.

Comme dans le cas associatif, nous construisons une application bilinéaire  $\bar{\mu}$  du produit semi-direct  $W = V \times M$  en utilisant  $\mu$  et  $\lambda$  ainsi qu'il suit.

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(x, y) &= \mu(x, y) & \bar{\mu}(m, x) &= -\lambda(x, m) \\ \bar{\mu}(x, m) &= \lambda(x, m) & \bar{\mu}(m, n) &= 0\end{aligned}$$

ou en une seule formule

$$(3) \quad \bar{\mu}((x, m), (y, n)) = (\mu(x, y), \lambda(x, n) - \lambda(y, m)).$$

On a, comme auparavant, un théorème.

**THÉORÈME.** Soit  $V$  et  $M$  des espaces vectoriels,  $\mu : V \times V \rightarrow V$  une application bilinéaire alternée et  $\lambda : V \times M \rightarrow M$  une application bilinéaire. Soit  $W = V \times M$  le produit semi-direct où  $\bar{\mu}$  est défini par (3). Alors  $\bar{\mu}$  définit une structure d'algèbre de Lie sur  $W$  si et seulement si est vérifiée la condition suivante :  $\mu$  est une structure d'algèbre de Lie sur  $V$  et  $\lambda$  définit sur  $M$  une structure de module sur  $V$ .

La raison principale pour formuler les deux théorèmes précédents bien connus est de fournir un motif pour la définition d'un module sur une algèbre de Vinberg. Soit  $V$  une algèbre de Vinberg de produit  $\mu$ , et soit des applications bilinéaires  $\lambda : V \times M \rightarrow M$  et  $\rho : M \times V \rightarrow V$ . Posons  $W = V \times M$  et définissons  $\bar{\mu}$  comme l'application donnant à  $V \times M$  la structure d'un produit semi-direct :

$$(4) \quad \bar{\mu}((x, m), (y, n)) = (\mu(x, y), \lambda(x, n) + \rho(m, y)).$$

Alors nous appellerons  $M$ , muni de l'action de  $V$  sur lui défini à l'aide de  $\lambda$  et de  $\rho$ , un module sur  $V$  si et seulement si  $W$  est une algèbre de Vinberg de produit  $\bar{\mu}$ . Ainsi, la définition revient à une écriture :

**DÉFINITION.** Soit  $V$  une algèbre de Vinberg de produit  $\mu$  et  $M$  un espace vectoriel. Supposons bilinéaires les applications  $\lambda : V \times M \rightarrow M$  et  $\rho : M \times V \rightarrow M$ . Alors  $\lambda$ ,  $\rho$  définissent une structure de bimodule sur  $M$  au-dessus de  $V$  si valent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda(x, \lambda(y, m)) - \lambda(\mu(x, y), m) &= \lambda(y, \lambda(x, m)) - \lambda(\mu(y, x), m), \\ \lambda(x, \rho(m, y)) - \rho(\lambda(x, m), y) &= \rho(m, \mu(x, y)) - \rho(\rho(m, x), y).\end{aligned}$$

Avec des notations plus conventionnelles ces conditions deviennent

$$(5) \quad x(ym) - y(xm) = [x, y]m \quad \text{où} \quad [x, y] = xy - yx,$$

$$(6) \quad x(my) - (xm)y = m(xy) - (mx)y.$$

La condition (5) peut s'exprimer très simplement par des mots: l'action gauche d'une algèbre de Vinberg sur un module est une action de l'algèbre de Lie associée (de produit  $\hat{\mu}(x, y) = \mu(x, y) - \mu(y, x)$ ). La condition (6) peut s'exprimer comme il suit: le côté gauche mesure à quel point l'action gauche et l'action droite ne réussissent pas à commuté; le côté droit à quel point l'action droite ne réussit pas à être associative. Classiquement (i.e. dans le cas associatif) les deux côtés valent zéro; ici ils sont seulement égaux.

Notons qu'un module *gauche* sur une algèbre de Vinberg est facile à définir par la condition (5). C'est seulement dans le cas où l'action gauche vaut zéro qu'il est raisonnable de définir une structure de module à *droite*; par (6) l'action droite est alors associative.

Des exemples de modules sur des algèbres de Vinberg sont tout d'abord l'algèbre elle-même et tout idéal bilatère d'une algèbre de Vinberg. Un exemple plus intéressant est peut-être le suivant:

$V$  est une algèbre de Vinberg arbitraire. Pour  $M$  prenons l'espace linéaire de toutes les applications linéaires:  $\alpha : V \rightarrow V$ . (Le choix d'une base pour  $V$  associe à chaque  $\alpha$  une matrice, de telle sorte que  $M$  peut être considéré comme l'espace des matrices  $n \times n$ , si  $n = \dim V$ .) Parmi les éléments de  $M$  figurent les opérateurs de multiplication à gauche  $L_x$ . Les produits  $\lambda(x, \alpha)$  et  $\rho(\alpha, y)$  sont maintenant donnés par

$$\lambda(x, \alpha) = [L_x, \alpha] + L_{\alpha x},$$

$$\rho(\alpha, y) = L_{\alpha y}.$$

Dans ce qui précède,  $\alpha x$  est l'image de  $x$  par l'application  $\alpha$ ; elle appartient encore à  $V$  de sorte que  $L_{\alpha x}$  a un sens.

Premièrement nous vérifions (5), avec des notations appropriées.

$$\begin{aligned} \lambda(x, \lambda(y, \alpha)) &= \lambda(x, [L_y, \alpha] + L_{\alpha y}) = \\ &= [L_x, [L_y, \alpha] + L_{\alpha y}] + L_{([L_y, \alpha] + L_{\alpha y})x} = \\ &= [L_x, [L_y, \alpha]] + [L_x, L_{\alpha y}] + L_{y(\alpha x) - \alpha(yx) + (\alpha y)x}. \end{aligned}$$

Les applications linéaires  $V \rightarrow V$  forment une algèbre de Lie relativement à la formation des crochets; nous utiliserons cela pour le premier terme

du dernier membre. Pour le nouveau premier terme qui en résulte et pour le second terme nous employons (1'). Nous obtenons ainsi:

$$\begin{aligned} & \lambda(x, \lambda(y, \alpha)) - \lambda(y, \lambda(x, \alpha)) = \\ & = [[L_x, L_y], \alpha] + L_{[x, \alpha y]} - L_{[y, \alpha x]} + L_{y(\alpha x) - \alpha(yx) + (\alpha y)x} \\ & \quad - L_{x(\alpha y) - \alpha(xy) + (\alpha x)y} = [L_{[x, y]}, \alpha] + L_* , \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} * &= x(\alpha y) - (\alpha y)x - y(\alpha x) + (\alpha x)y + y(\alpha x) - \alpha(yx) + (\alpha y)x \\ &\quad - x(\alpha y) + \alpha(xy) - (\alpha x)y = \alpha(xy) - \alpha(yx) = \alpha[x, y]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda(x, \lambda(y, \alpha)) - \lambda(y, \lambda(x, \alpha)) = \lambda([x, y], \alpha),$$

c'est justement (5). Maintenant nous vérifions (6).

$$\begin{aligned} \lambda(x, \rho(\alpha, y)) - \rho(\lambda(x, \alpha), y) &= \lambda(x, L_{\alpha y}) - L_{\lambda(x, \alpha)y} = \\ &= [L_x, L_{\alpha y}] + L_{L_{\alpha y}x} - L_{[L_x, \alpha]y} + L_{\alpha xy} = \\ &= L_{[x, \alpha y]} + L_{(\alpha y)x - x(\alpha y) + \alpha(xy) - (\alpha x)y} = L_{\alpha(xy)} - L_{(\alpha x)y} = \\ &= \rho(\alpha, xy) - \rho(L_{\alpha x}, y) = \rho(\alpha, \mu(x, y)) - \rho(\rho(\alpha, x), y). \end{aligned}$$

L'exemple précédent est seulement un cas particulier d'un théorème dont la preuve est un exercice utile.

**THÉORÈME.** *Supposons que  $M$  est un module sur l'algèbre de Vinberg  $V$ . Alors l'ensemble  $M' = \text{Hom}(V, M)$  des applications linéaires de  $V$  dans  $M$  a aussi une structure de module sur  $V$ . En fait, si  $\mu$ ,  $\lambda$  et  $\rho$  ont leur signification habituelle et si  $\lambda'$ ,  $\rho'$  se réfèrent à  $M'$ , alors, pour  $\alpha \in M'$*

$$\begin{aligned} \lambda'(x, \alpha)y &= \lambda(x, \alpha y) - \alpha \mu(x, y) + \rho(\alpha x, y), \\ \rho'(\alpha, x)y &= \rho(\alpha x, y). \end{aligned}$$

Dans le théorème de la section 2 nous avons signalé que la formation des commutateurs d'une algèbre de Vinberg conduit à une structure d'algèbre de Lie. Ce théorème peut être appliqué au produit semi-direct  $V \times M$ . On obtient alors.

THÉORÈME. Soit  $(V, \mu)$  une algèbre de Vinberg et  $M$  un module sur cette algèbre, avec  $\lambda, \rho$  comme actions gauche et droite. L'application  $\hat{\lambda}$ , avec  $\hat{\lambda}(x, m) = \lambda(x, m) - \rho(m, x)$  munit alors  $M$  d'une structure de module sur l'algèbre de Lie  $(V, \hat{\mu})$ .

L'application de ce théorème à l'exemple précédent donne  $\hat{\lambda}(x, \alpha) = [L_x, \alpha]$ ; i.e. l'une des structures habituelles sur  $M$ . Ainsi l'exemple montre que  $\lambda, \rho$  est un raffinement de la structure de module bien connue  $\hat{\lambda}$ .

Il est alors clair que si  $M$  est un module sur une algèbre de Vinberg, il a deux structures de module sur l'algèbre de Lie associée. La première est donnée par le théorème ci-dessus; la seconde est obtenue à partir du théorème en changeant  $\rho$  en zéro: cela donne la même structure que celle donnée directement par la condition (5).

On veut espérer avoir une troisième structure de module sur l'algèbre de Lie associée en prenant  $\lambda = 0$  — mais cela ne marche pas, car (6) suppose déjà  $\lambda$ . Dans le cas associatif, cependant, cette troisième méthode marche également.

## PARTIE II: *Algèbres associatives et applications multilinéaires*

### *Introduction.*

Une classe intéressante de propriétés des algèbres associatives devient accessible si l'on considère les applications multilinéaires dans lui-même de l'espace vectoriel sous-jacent. Le produit  $\mu$  de l'algèbre fournit un opérateur  $\delta$  qui associe à une application linéaire d'ordre  $n$  une application linéaire d'ordre  $n + 1$ . On peut exprimer à l'aide de l'opérateur  $\delta$  des propriétés connues de l'algèbre. En général, les calculs avec  $\delta$  (comme de prouver que  $\delta^2 = 0$ ) sont assez encombrants. Cependant, en introduisant un « produit de composition » qui associe à tout couple formé d'une application linéaire d'ordre  $m$  et d'une application linéaire d'ordre  $n$  une application linéaire d'ordre  $n + m - 1$ , et en prouvant la seule identité (9), on fait presque tout le travail. (Il se trouve que (9) est une version inversée et graduée de l'identité de Vinberg.) Les commutateurs du produit de composition vérifient les axiomes d'une algèbre de Lie graduée. On montre que l'opérateur  $\delta$  est le commutateur avec l'application produit  $\mu$ . On définit la cohomologie associée à  $\delta$  et on expose ses relations vis-à-vis des dérivations et des extensions. Du système des applications multilinéaires la cohomologie hérite d'une structure graduée de Lie. Cette dernière et la cohomologie sont appliquées dans la théorie des déformations des algèbres associatives.

Un exemple simple de déformation illustre comment en pratique marche le mécanisme.

Vu la nature d'exposition de l'article, on a limité les connaissances préliminaires requises à celles de la partie I sans compter quelques facilités à jongler avec les applications multilinéaires.

#### 4. *Le produit de composition.*

Dans cette section nous recherchons, d'un point de vue « plus élevé », la nature de la propriété d'associativité. Des sections de la partie III en feront de même des propriétés caractérisant les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg. La ressemblance frappante de tous ces cas nous permettra d'être beaucoup plus bref dans les deux derniers cas. L'expérience ainsi gagnée avec ces types d'algèbres nous permettra de formuler des critères généraux qui s'appliqueront quand, pour d'autres types d'algèbres, on aura des connaissances analogues.

Soit  $V$  un espace vectoriel,  $\mu$  un produit associatif sur  $V$  (nous utiliserons de façon interchangeable  $\mu(x, y)$  et  $xy$ ), et  $M$  un module sur  $(V, \mu)$  d'action gauche  $\lambda$  et d'action droite  $\rho$ . (Nous utiliserons  $xm$  à la place de  $\lambda(x, m)$  et  $my$  à la place de  $\rho(m, y)$ .) Le cas particulier  $M = V$ ,  $\lambda = \rho = \mu$  est très significatif pour les applications.

Supposons que  $f$  est une fonction à  $n$  variables dont le domaine est  $V$ , qui prend ses valeurs dans  $M$ , et qui est linéaire par rapport à chaque variable — nous appellerons  $f$  une application linéaire d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $M$ . Nous pouvons alors associer à  $f$  une application linéaire d'ordre  $n + 1$  de  $V$  dans  $M$  par une méthode très ingénieuse. On note  $\delta f$  l'application nouvelle; ainsi  $\delta$  est un opérateur qui augmente les degrés d'une unité. On a

$$\begin{aligned} (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= x_0 f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0 x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ f(x_0, x_1 x_2, x_3, \dots, x_n) + \dots + (-1)^{n-1} f(x_0, \dots, x_{n-2} x_{n-1}, x_n) + \\ &+ (-1)^n f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} x_n) + (-1)^{n+1} f(x_0, \dots, x_{n-1}) x_n, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \lambda(x_0, f(x_1, \dots, x_n)) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i f(x_0, \dots, \mu(x_{i-1}, x_i), \dots, x_n) + \\ &+ (-1)^{n+1} \rho(f(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n). \end{aligned}$$

Considérons quelques cas particuliers de cette formule.  
 $n = 0$ . Alors  $f$  est précisément un élément  $m$  de  $M$ , et on a

$$(\delta m)(x) = \lambda(x, m) - \rho(m, x) = xm - mx.$$

Ainsi  $\delta m : V \rightarrow M$  est la « dérivation intérieure » de  $V$  dans  $M$  déterminée par  $m$ . A vrai dire, nous avons

$$(\delta m)(xy) = (\delta m)(x)y + x(\delta m)(y).$$

$n = 1$ . Alors  $f$  est une application linéaire  $V \rightarrow M$ . Supposons  $\delta f = 0$ ; c'est-à-dire

$$0 = (\delta f)(x, y) = xf(y) - f(xy) + f(x)y$$

ou

$$f(xy) = xf(y) + f(x)y.$$

$f$  est, d'une façon apparente, une dérivation de  $V$  dans  $M$ .

Comme autre interprétation nous considérons maintenant le cas  $M = V$ .  $f$  est alors une application linéaire de  $V$  dans  $V$  et, quel que soit le réel  $t$ ,  $e^{tf}$  (donné par une série de puissances) est une application linéaire inversible de  $V$  sur  $V$ ; son inverse est  $e^{-tf}$ . On obtient un produit  $\mu_t$  équivalent (c.-à-d. isomorphe) à  $\mu$  en posant

$$(7) \quad \mu_t(x, y) = e^{-tf} \mu(e^{tf}x, e^{tf}y).$$

Nous recherchons l'effet dans  $\mu_t$  d'un changement du premier ordre:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu_t \Big|_{t=0}(x, y) &= -f\mu(x, y) + \mu(fx, y) + \mu(x, fy) = \\ &= -f(xy) + f(x)y + xf(y) = (\delta f)(x, y). \end{aligned}$$

Cela donne de  $\delta f$  une seconde interprétation comme l'effet du premier ordre dans une famille à un paramètre de structures équivalentes.

$n = 2$ . Nous considérons maintenant une famille arbitraire (différentiable)  $\mu_t$  de structures d'algèbre associative; de telle sorte que, pour tout  $t$ , nous avons

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) - \mu_t(\mu_t(x, y), z) = 0.$$

Nous différentions à nouveau et prenons  $t = 0$  (on pose  $\mu_0 = \mu$ ), notons  $f$  pour  $\frac{d}{dt} \mu_t \Big|_{t=0}$ . Nous trouvons

$$f(x, \mu(y, z)) + \mu(x, f(y, z)) - f(\mu(x, y), z) - \mu(f(x, y), z) = 0,$$

ou

$$f(x, yz) + xf(y, z) - f(xy, z) - f(x, y)z = 0.$$

Après un réarrangement des termes, on voit que c'est exactement  $\delta f = 0$ . Ainsi, les applications bilinéaires  $f$  de  $V$  dans lui-même (cas  $M=V$ ) vérifiant  $\delta f = 0$  sont les « déformations infinitésimales » de  $\mu$ . Une autre façon d'exprimer cela est que  $\mu + tf$  vérifie la condition d'associativité jusqu'aux termes du second ordre (i.e. modulo  $t^2$ ) si et seulement si  $\delta f = 0$ . La famille (7) est un cas particulier (famille d'équivalences) des familles de structures associatives. (Noter la différence de la signification de  $f$  dans les deux cas !)

Encore une interprétation : ce qu'on appelle le *problème de l'extension*. Le produit semi-direct  $W = V \times M$  avec comme produit  $\bar{\mu}$  celui défini dans (2) est une algèbre dans laquelle (i)  $M$  est un idéal vérifiant  $M^2 = 0$  (i.e.  $mn = 0$  quels que soient  $m, n \in M$ ) et dans laquelle (ii) le quotient  $W/M$  est isomorphe à  $(V, \mu)$ , tandis que (iii)  $M$  est un module sur  $W/M$  par l'intermédiaire de  $\lambda$  et  $\rho$ . Le problème de l'extension consiste à trouver toutes les multiplications  $\bar{\mu}'$  de  $W$  telles qu'on ait (i), (ii), (iii). Il n'est pas nécessaire que  $V$  soit une sous-algèbre de  $W$  pour une de ses structures ; néanmoins nous continuerons à représenter  $W$  comme un espace vectoriel produit de  $V$  et de  $M$ . Supposons que  $\bar{\mu}'$  est un tel produit, alors (i) implique que  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\mu}'$  coïncident sur  $M$  (ils valent tous deux zéro) ; (ii) implique que  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\mu}'$  diffèrent sur  $V$  par une application  $\varphi$  à valeurs dans  $M$ , tandis que (iii) implique que  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\mu}'$  coïncident quand on les évalue par un élément de  $V = W/M$  et un élément de  $M$ .

En une formule,

$$\bar{\mu}'((x, m), (y, n)) = (\mu(x, y), \varphi(x, y) + \lambda(x, n) + \rho(m, y)).$$

On voit maintenant par un calcul direct que l'associativité de  $\bar{\mu}'$  est équivalente à

$$\lambda(x, \varphi(y, z)) - \rho(\varphi(x, y), z) + \varphi(x, \mu(y, z)) - \varphi(\mu(x, y), z) = 0,$$

c'est-à-dire à  $\delta\varphi = 0$ . On considère comme équivalentes deux extensions  $\bar{\mu}'$  et  $\bar{\mu}''$  quand elles sont liées par un automorphisme d'espace vectoriel de  $W$  qui induit l'identité sur  $M$  et sur  $W/M$ . Une telle application  $F$  a la forme

$$F(x, m) = (x, m + f(x)), \quad \text{avec} \quad f: V \rightarrow M.$$

L'application inverse est  $F^{-1}(x, m) = (x, m - f(x))$ . Les structures équivalentes à  $\bar{\mu}$  sont ainsi

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'((x, m), (y, n)) &= F^{-1}\bar{\mu}(F(x, m), F(y, n)) = \\ &= F^{-1}\bar{\mu}((x, m + f(x)), (y, n + f(y))) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= F^{-1}(\mu(x, y), \lambda(x, n + f(y)) + \rho(m + f(x), y)) = \\ &= (\mu(x, y), -f(\mu(x, y)) + \lambda(x, n) + \lambda(x, f(y)) + \rho(m, y) + \rho(f(x), y)). \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas,

$$\varphi(x, y) = -f(\mu(x, y)) + \lambda(x, f(y)) + \rho(f(x), y) = (\delta f)(x, y).$$

De ces exemples émerge une certaine idée. Dans chacun des exemples est un problème dont la solution  $\alpha$  est n'importe quelle solution de  $\delta x = 0$ . Parmi les solutions certaines moins intéressantes sont de la forme  $\alpha = \delta\beta$ . Cela suggère  $\delta^2\beta = 0$ . A vrai dire, cela peut se vérifier — nous le ferons plus tard. Cependant, une vérification directe serait maintenant extrêmement laborieuse, et on peut s'attendre au même phénomène pour d'autres calculs. Aussi introduisons nous certaines notations comme outil pour les mener à bien.

Pour le moment nous considérons un espace vectoriel  $V$  mais ne supposons pas qu'il ait quelque structure d'algèbre. Nous prenons pour  $f$  une application linéaire d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $V$  et de façon analogue pour  $g$  une application linéaire d'ordre  $m$  de  $V$  dans  $V$ . (En fait,  $g$  peut prendre ses valeurs dans n'importe quel espace vectoriel.) Nous définissons le *produit de composition*  $g \bar{o} f$  qui est une application linéaire d'ordre  $n + m - 1$  par

$$(8) \quad \begin{aligned} (g \bar{o} f)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{(i-1)(n-1)} g(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i, \dots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \dots, x_{n+m-1}) \end{aligned}$$

Cette définition est motivée par la suite.

**APPLICATION 1.** Soit  $\mu$  une application bilinéaire de  $V$  dans  $V$ ; on a alors

$$(\mu \bar{o} \mu)(x, y, z) = \mu(\mu(x, y), z) - \mu(x, \mu(y, z)).$$

Ainsi  $\mu \bar{o} \mu = 0$  est la condition nécessaire et suffisante pour que  $\mu$  définisse sur  $V$  une structure d'algèbre associative.

**APPLICATION 2.** Soit  $f$  une application linéaire d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $V$ , et  $\mu$  une structure associative sur  $V$ . Alors, à l'aide de la formule donnant  $\delta f$  (avec  $\lambda = \rho = \mu$ ) on trouve

$$\delta f = (-1)^{n+1} \mu \bar{o} f - f \bar{o} \mu.$$

$-f \bar{o} \mu$  correspond à la somme des termes « du milieu »;  $(-1)^{n+1} \mu \bar{o} f$  aux termes « extrêmes ».

Nous avons ainsi montré que l'introduction de  $\bar{o}$  conduit à une notation plus courte. Pour calculer avec elle, nous avons besoin de quelques propriétés.

THÉORÈME. Soit  $f, g, h$  des applications linéaires d'ordre  $n, m, p$  de  $V$  dans lui-même. On a alors l'identité suivante

$$(9) \quad (f \bar{o} g) \bar{o} h - f \bar{o} (g \bar{o} h) = (-1)^{(m-1)(p-1)} \{ (f \bar{o} h) \bar{o} g - f \bar{o} (h \bar{o} g) \}.$$

En particulier, pour  $n = 1$  alors  $f \bar{o} g = f o g$  et les deux côtés de (9) valent zéro. Pour  $n = 0$ , alors  $f \bar{o} g = 0$ .

L'identité (9) ressemble beaucoup à l'identité de Vinberg (1), excepté en ce qui concerne l'ordre inverse des facteurs et la puissance de  $(-1)$  qui reflète la graduation. Nous espèrerons donc aussi quelques propriétés analogues.

Pour prouver (9), on a besoin de quelque patience, d'une grande feuille de papier, d'un crayon pointu et d'une bonne lumière. Cependant l'effort sera récompensé puisque c'est l'un des quelques théorèmes dont la preuve est un peu pénible. Nous indiquons ici la méthode, laissant les détails comme les puissances de  $(-1)$  nécessaires aux soins du lecteur.

Dans la définition (8) de  $f \bar{o} g$ , la fonction  $g$  « visite » tous les espaces possibles sur  $f$ , avec des signes appropriés. Quand  $\bar{o} h$  est ensuite appliqué sur la droite, alors  $h$  « visite » tous les espaces possibles de  $f \bar{o} g$ . Dans certains termes  $h$  occupera un espace possible de  $f$ ; dans d'autres un espace possible de  $g$ . Les derniers termes constituent exactement  $f \bar{o} (g \bar{o} h)$ ; dans les termes restants (les premiers)  $g$  et  $h$  occupent tous deux des espaces possibles de  $f$ . Un observateur plus fin trouvera dans ces termes une certaine symétrie en  $g$  et  $h$ . — Les détails sont laissés au lecteur...

Les commutateurs des produits de composition forment une algèbre de Lie graduée. Pour fixer la terminologie, nous appellerons  $n - 1$  le degré réduit d'une application linéaire d'ordre  $n$ ; le degré « ordinaire » est  $n$ .

THÉORÈME. Si  $f, g$  sont des applications linéaires d'ordre  $n$  et d'ordre  $m$  de l'espace vectoriel  $V$  dans lui-même (les degrés réduits valent  $n - 1$  resp.  $m - 1$ ), et si

$$[f, g]^\circ = g \bar{o} f - (-1)^{(n-1)(m-1)} f \bar{o} g$$

alors  $[ , ]^\circ$  est, par rapport à la graduation réduite, une structure d'algèbre de Lie graduée sur l'espace des applications multilinéaires. C'est-à-dire

(i)  $[f, g]^\circ$  est une application linéaire d'ordre  $n + m - 1$  (de degré réduit  $n+m-2$ ) qui dépend linéairement de  $f$  et de  $g$ .

$$(ii) \quad [f, g]^\circ = (-1)^{(m-1)(n-1)+1} [g, f]^\circ.$$

*Si  $h$  est une application linéaire d'ordre  $p$ , alors*

$$(iii) \quad (-1)^{(n-1)(p-1)} [[f, g]]^\circ, h ]^\circ + (-1)^{(m-1)(n-1)} [[g, h]]^\circ, f ]^\circ + \\ + (-1)^{(p-1)(m-1)} [[h, f]]^\circ, g ]^\circ = 0.$$

La preuve de (iii) (identité de Jacobi) est la même que celle du théorème de la section 2, excepté qu'il faut veiller aux signes. — Notons l'ordre inhabituel des facteurs dans la définition de  $[,]^\circ$ ; il reflète le fait que, d'un certain point de vue, l'ordre des facteurs dans  $f \bar{o} g$  est l'ordre « erroné ».

Des conséquences immédiates du théorème sont par exemple les suivantes:

$$\delta f = - [\mu, f]^\circ, \quad \mu \bar{o} \mu = \frac{1}{2} [\mu, \mu]^\circ;$$

l'identité de Jacobi donne, elle,

$$\delta^2 f = [\mu, [\mu, f]^\circ]^\circ = \frac{1}{2} [[\mu, \mu]^\circ, f]^\circ = 0$$

lorsque  $\mu$  est associatif. L'identité de Jacobi donne aussi

$$(10) \quad \delta [f, g]^\circ = [\delta f, g]^\circ + (-1)^{n-1} [f, \delta g]^\circ.$$

## 5. Cohomologie.

Dans la section précédente nous avons vu un exemple de la situation suivante: on a un système  $(C^n)_{n=-\infty}^{\infty}$  d'espaces vectoriels (ou de modules si on aime la généralité) et une application linéaire  $\delta$  qui envoie chaque  $C^n$  dans  $C^{n+1}$  telle que  $\delta^2 = 0$ . Nous pouvons ainsi prendre pour  $C^n$  l'espace des applications linéaires d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $V$  pour  $n \geq 0$  et  $C^n = \{0\}$  pour  $n < 0$ . On peut représenter la situation par la suite

$$0 \xrightarrow{\delta} C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^{n-1} \xrightarrow{\delta} C^n \xrightarrow{\delta} C^{n+1} \xrightarrow{\delta} \dots$$

A chaque  $C^n$  est associée une application entrante  $\delta$ , dont on note  $B^n$  l'image (de telle sorte que  $B^n = \delta C^{n-1}$ ) et une application sortante  $\delta$ , dont on note le noyau (ensemble des zéros) par  $Z^n$ . Le fait que  $\delta^2 = 0$  dit que  $B^n$  est un sous-espace de  $Z^n$ . Les deux sections précédentes contiennent certaines illustrations de ce que  $B^n$  et  $Z^n$  signifient pour les petites valeurs de  $n$  dans le cas des algèbres associatives.

La suite ci-dessus est appelée *exacte en  $C^n$*  si  $B^n = Z^n$ ; elle est dite *exacte* si elle est exacte en  $C^n$  pour tout  $n$ . Comme mesure du défaut d'exactitude de la suite on introduit selon la coutume les quotients  $H^n = Z^n/B^n$ . On les appelle les *groupes de cohomologie*; dans la situation présente les groupes sont en réalité des espaces vectoriels.  $Z^n$  et  $B^n$  sont appelés les espaces de

*cocycles* resp. de *cobords*. Dans le cas d'une algèbre  $V$ , comme dans la section antérieure, on écrit  $H^n(V, V)$ : c'est « la cohomologie de  $V$  à coefficients dans  $V$  ». Plus généralement, quand  $M$  est un module sur  $V$ , on a les groupes de cohomologie  $H^n(V, M)$  de  $V$  à coefficients dans  $M$ . Nous les décrirons brièvement.

Dans certaines situations, comme par exemple celle de la section précédente on a des applications bilinéaires (les produits)  $C^n \times C^m \rightarrow C^p$  (dans notre cas, le produit est donné par  $[,]^\circ$  et  $p = n + m - 1$ ), et  $\delta$  est une dérivation par rapport au produit (dans notre cas voir (10)). Alors quand on applique  $\delta$  au produit de deux cocycles on obtient zéro; ainsi le produit de deux cocycles est un cocycle. De façon analogue, le produit d'un cocycle et d'un cobord est un cobord. (Prendre dans (10) pour  $g$  un cocycle et pour  $\delta f$  un cobord. Alors le dernier terme disparaît de sorte que  $[\delta f, g]^\circ$  est égal au premier terme qui est un cobord.) Ainsi, les produits avec la propriété de dérivation induisent pour les groupes de cohomologie des produits  $H^n \times H^m \rightarrow H^p$  puisque le produit de deux cocycles est changé seulement d'un cobord quand on change d'un cobord les facteurs. En particulier, dans la situation de la section 4, on a des produits

$$H^n(V, V) \times H^m(V, V) \rightarrow H^{n+m-1}(V, V),$$

produits qu'on note également  $[,]^\circ$ . On a aussi une structure de Lie graduée puisque toutes les propriétés qu'on peut décrire par des équations se généralisent quand les opérations des équations se généralisent.

Dans le cas général de  $H^n(V, M)$ , nous avons déjà décrit les espaces  $C^n$  et l'application  $\delta$  au début de la section 4. Tout ce qui nous reste à faire est de prouver  $\delta^2 = 0$  ce qui jusqu'ici n'a été fait que pour  $M = V$ . À cette fin, nous considérons à nouveau le produit semi-direct  $W = V \times M$ . Soit  $f$  un élément de  $C^n$ , i.e. une application linéaire d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $M$ ; on associe à  $f$  une application  $\bar{f}$  linéaire d'ordre  $n$  de  $W$  dans  $W$  par le procédé évident « d'extension »

$$\bar{f}((x_1, m_1), \dots, (x_n, m_n)) = (0, f(x_1, \dots, x_n)).$$

Notons que  $f = 0$  si et seulement si  $\bar{f} = 0$ . Le produit dans  $W$  est encore noté  $\bar{\mu}$  (quoique  $\bar{\mu}$  n'est pas obtenu à partir de  $\mu$  comme  $\bar{f}$  l'est à partir de  $f$ ;  $\bar{\mu}$  contient aussi  $\lambda$  et  $\rho$ ). On invite le lecteur à vérifier que  $\bar{\mu} \circ \bar{f}$  et  $\bar{f} \circ \bar{\mu}$  tous les deux ont la propriété de valoir zéro chaque fois qu'une de leurs entrées vient du facteur  $M$  et que les valeurs sont toujours dans le facteur  $M$ . Une recherche soigneuse montrera, en fait, que  $\delta \bar{f}$  (qui est une application linéaire d'ordre  $n + 1$  de  $W$  dans  $W$ ) est juste la même chose que la fonction obtenue

en « étendant »  $\delta f$ . C'est-à-dire  $\delta \bar{f} = \overline{\delta f}$ . Cela implique  $\delta^2 \bar{f} = \overline{\delta^2 f} = 0$ , donc  $\delta^2 f = 0$ .

Les exemples discutés dans la section 3 ont les interprétations cohomologiques suivantes :

$V$  est une algèbre associative,  $M$  un  $V$ -module.

EXEMPLE 1.  $B^1(V, M)$  est l'espace des dérivations intérieures de  $V$  dans  $M$ .  $Z^1(V, M)$  est l'espace de toutes les dérivations de  $V$  dans  $M$ . L'espace quotient  $H^1(V, M)$  mesure à quel point il y a d'autres dérivations que les dérivations intérieures.

EXEMPLE 2.  $B^2(V, V)$  est l'ensemble de toutes les déformations infinitésimales du produit  $\mu$  obtenues par une famille de transformations inversibles de  $V$ . Ces déformations en réalité ne déforment rien ; elles effectuent simplement un changement de base.  $Z^2(V, V)$  est l'espace de toutes les déformations infinitésimales. Le quotient  $H^2(V, V)$  mesure à quel point il y a de vraies déformations infinitésimales. Dans la section suivante nous verrons que  $H^3(V, V)$  détermine à quel point une déformation infinitésimale appartient réellement à une famille de déformations. Par exemple c'est toujours le cas pour  $H^3(V, V) = 0$ .

EXEMPLE 3. Quand dans l'exemple 1 nous prenons  $M = V$  alors  $B^1(V, V)$  est une algèbre de Lie par rapport au produit  $[,]^\circ$ . C'est l'algèbre de Lie du groupe des opérations  $b \mapsto aba^{-1}$  (automorphismes intérieurs) de l'algèbre, où  $a$  est un élément inversible quelconque. (S'il n'y a pas d'unité dans  $V$ , on peut prendre  $b \mapsto (I+a)b(I+a)^{-1}$  où  $a$  est tel que la multiplication gauche comme la multiplication droite par  $I+a$  est inversible.)  $Z^1(V, V)$  est aussi une algèbre de Lie, à savoir celle du groupe de tous les automorphismes. Comme le premier groupe est normal dans le dernier, le quotient est un groupe. Son algèbre de Lie est juste  $H^1(V, V)$  avec le produit induit par  $[,]^\circ$ .

EXEMPLE 4.  $H^2(V, M)$  mesure l'existence d'extensions de  $V$  par  $M$  à une équivalente près. L'ensemble de toutes les extensions est paramétrée par  $Z^2(V, M)$ ; les extensions inessentielles par  $B^2(V, M)$ .

## 6. Déformations d'algèbres associatives.

Dans la section 4, nous avons déjà discuté brièvement le concept de déformation infinitésimale d'une algèbre associative  $V$  (cf. le cas  $n = 2$ ); dans le cas  $n = 1$  nous avons identifié les déformations infinitésimales dues à une famille de transformations inversibles de  $V$ . Dans la section 5, exemple 2, nous avons indiqué la relation avec la cohomologie. Nous allons maintenant recommencer en utilisant les opérations  $\bar{o}$  et  $[,]^\circ$  et leurs pro-

priétés y compris leurs relations avec la cohomologie. Au cours des calculs nous essayerons de montrer l'efficacité de  $\bar{o}$  et de  $[,]^\circ$  à accomplir les opérations essentielles.

La condition que  $\mu$  est une multiplication associative de l'espace vectoriel  $V$  s'exprime par  $\mu \bar{o} \mu = 0$ . Supposons que  $\mu + \varphi$ , où  $\varphi$  est une application linéaire de  $V$  dans  $V$ , est aussi associatif; alors

$$0 = (\mu + \varphi) \bar{o} (\mu + \varphi) = \mu \bar{o} \mu + \mu \bar{o} \varphi + \varphi \bar{o} \mu + \varphi \bar{o} \varphi = \\ = -\delta\varphi + \frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\circ,$$

ou

$$(11) \quad \delta\varphi - \frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\circ = 0.$$

C'est l'équation de déformation. Nous serons intéressés à trouver toutes les « petites » solutions  $\varphi$  de cette équation.

Il existe diverses méthodes pour résoudre (11). La méthode des séries formelles de puissances est intuitivement la plus simple, quoique pas toujours la plus pratique dans les situations réelles. Nous posons donc

$$\varphi = t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + t^3\varphi_3 + \dots$$

et substituons dans (11). (A strictement parler,  $t$  est une « variable » dans un sens technique. Si l'on permet de considérer des séries de puissances en  $t$  dont les coefficients sont des applications bilinéaires, on est obligé de façon analogue de considérer des séries de puissances en  $t$  dont les coefficients sont des applications multilinéaires quelconques ou des nombres réels quelconques. Nous n'entrerons pas dans les détails et passerons tant bien que mal à travers tout cela aussi bien que nous le pourrons.) La suite suivante d'équations apparaît quand on annule les coefficients des puissances de  $t$ .

$$\delta\varphi_1 = 0$$

$$\delta\varphi_2 - \frac{1}{2} [\varphi_1, \varphi_1]^\circ = 0$$

$$\delta\varphi_3 - [\varphi_1, \varphi_2]^\circ = 0$$

.....

$$\delta\varphi_{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\varphi_i, \varphi_{n+1-i}]^\circ = 0$$

Ainsi, il est nécessaire que  $\varphi_1$  soit un cocycle. Les résultats de la section 5 impliquent que, alors,  $\frac{1}{2} [\varphi_1, \varphi_1]^\circ$  est aussi un cocycle, donc représente une classe de cohomologie dans  $H^3(V, V)$ . Si cette classe (appelée l'obstruction première) vaut zéro, alors  $\frac{1}{2} [\varphi_1, \varphi_1]^\circ$  est un cobord, et on peut trouver  $\varphi_2$ .

Naturellement,  $\varphi_2$  est unique à quelque chose dont le  $\delta$  vaut zéro i.e. à un cocycle près. Si l'on peut trouver  $\varphi_2$ , on peut continuer avec  $\varphi_3$ . Nous allons montrer que à chaque étape nous trouvons un cocycle pour l'expression à laquelle le  $\delta\varphi$  suivant doit être égal. Si cette expression est un cobord ou si on peut en faire un cobord en modifiant d'un cocycle le  $\varphi$  précédent, alors nous pouvons considérer le pas suivant.

Ainsi supposons que l'on a trouvé  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ; i.e. qu'en posant

$$\varphi = t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots + t^n\varphi_n + t^{n+1}\varphi_{n+1} + \dots$$

(les  $\varphi_{n+1}$  et les coefficients suivants sont arbitraires)

on a

$$[\mu + \varphi, \mu + \varphi]^\circ = t^{n+1} F_{n+1} + \dots$$

avec

$$F_{n+1} = -2\delta\varphi_{n+1} + \sum_{i=1}^n [\varphi_i, \varphi_{n+1-i}]^\circ.$$

A cause de l'identité de Jacobi pour les algèbres de Lie graduées nous obtenons (3 termes sont égaux !)

$$\begin{aligned} 0 &= [\mu + \varphi, [\mu + \varphi, \mu + \varphi]^\circ]^\circ = [\mu + t\varphi_1 + \dots, t^{n+1} F_{n+1} + \dots]^\circ = \\ &= t^{n+1} [\mu, F_{n+1}]^\circ + \dots \end{aligned}$$

Comme le coefficient de  $t^{n+1}$  doit être zéro, on obtient

$$0 = [\mu, F_{n+1}]^\circ = -\delta F_{n+1} = -\delta \sum_{i=1}^n [\varphi_i, \varphi_{n+1-i}]^\circ$$

qui est ce que nous voulons montrer: l'expression à laquelle  $\delta\varphi_{n+1}$  doit être égale est toujours un cocycle. C'est seulement si sa classe de cohomologie (« l'obstruction d'ordre  $n$  ») s'évanouit qu'on peut trouver  $\varphi_{n+1}$ . — Nous voyons que  $H^3(V, V) = 0$  entraîne que chaque cocycle  $\varphi_1$  peut « s'étendre » à une famille à un paramètre de déformations.

Par souci de généralité, nous considérons brièvement une série pour  $\varphi$  qui commence à un terme d'ordre plus grand:

$$\varphi = t^k \varphi_k + t^{k+1} \varphi_{k+1} + \dots \quad (k > 1).$$

Alors, en substituant dans (11), on montre comme auparavant que non seulement  $\varphi_k$  mais aussi  $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{2k-1}$  sont des cocycles.

L'« apparence » d'une famille de déformations peut changer quand on la compose avec une famille  $F_t = I + tf_1 + t^2 f_2 + \dots$  de transformations

inversibles de  $V$ ;  $f_1, f_2, \dots$  sont ici des applications linéaires  $V \rightarrow V$  et on peut calculer  $F_t$  terme par terme, par exemple les premiers termes sont

$$F_t^{-1} = I - tf_1 + t^2(-f_2 + f_1^2) + t^3(-f_3 + f_1f_2 + f_2f_1 - f_1^3) + \dots$$

La déformation modifiée est donnée par

$$\mu'_t(x, y) = F_t^{-1} \mu_t(F_tx, F_ty) = F_t^{-1} \mu(F_tx, F_ty) + F_t^{-1} \varphi(F_tx, F_ty).$$

Supposons que la série de puissances de  $\varphi$  commence comme ci-dessus par  $t^k$  ( $k \geq 1$ ) et décidons de la composer avec un  $F_t$  qui commence à la même puissance:  $F_t = I + t^k f_k + \dots$  On trouve alors

$$\begin{aligned} \mu'_t(x, y) &= \mu(x, y) + t^k(-f_k \mu(x, y) + \mu(f_k x, y) + \mu(x, f_k y)) + \\ &\quad + t^k \varphi_k + \dots \end{aligned}$$

où les points indiquent les termes d'ordre plus grand que  $k$ . Ainsi, en posant  $\varphi' = \mu'_t - \mu$ , on a

$$\varphi' = t^k(-\delta f_k + \varphi_k) + \dots;$$

autrement dit, étant donné une famille de déformations de  $\mu$ , on peut par le choix de  $F_t$  changer d'un cobord arbitraire le terme principal de l'expansion en série de puissances. En ce sens, seule la classe de cohomologie du terme principal « compte ». En particulier, si le terme principal est un cobord, on peut le changer en zéro par un choix convenable de  $F_t$ . Comme corollaire, si  $H^2(V, V) = 0$ , chaque terme principal, étant un cocycle, est en fait un cobord et peut être changé en zéro. Nous pouvons montrer que, en fait, on peut alors trouver une famille  $F_t$  telle que le  $\varphi'$  final est zéro c'est-à-dire qu'on a le

**THÉORÈME.** *Si  $H^2(V, V) = 0$ , alors toute famille  $\mu_t$  de déformations d'une structure associative  $\mu$  est triviale si c'est une famille à un paramètre comme série formelle de puissances. i.e. existe une famille  $F_t$  de transformations inversibles de l'espace vectoriel sous-jacent développables en séries formelles de puissances à un paramètre telle que*

$$\mu_t(x, y) = F_t^{-1} \mu(F_tx, F_ty).$$

(Dans ce cas, on dit que  $\mu$  est *rigide*)

La seconde méthode pour résoudre (11) est à vrai dire la méthode classique utilisée dans la résolution des équations linéaires — on exprime certaines des inconnues au moyen d'autres, les paramètres. Dans ce cas,

cependant, les équations ne sont pas linéaires et il peut y avoir en pratique des difficultés à trouver explicitement les solutions.

La méthode est fondée sur deux idées: (i) partager (11) en trois ensembles d'équations et les résoudre consécutivement, (ii) choisir les paramètres les plus favorables. Les deux buts sont atteints en observant qu'on peut décomposer l'espace des applications linéaires d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $V$  en une somme directe de trois sous-espaces. Le premier est  $B^n$ , l'espace des cobords, le second nous l'appellerons (par abus de notation)  $H^n$ ; c'est tout sous-espace de  $Z^n$  complémentaire de  $B^n$ , il est isomorphe à  $H^n(V,V)$ . Le troisième  $U^n$  est complémentaire de  $Z^n$ , de telle sorte que l'espace en entier est la somme directe de  $Z^n$  et de  $U^n$ . La décomposition est ainsi  $B^n + H^n + U^n$ , ou  $Z^n + U^n$ , comme le dictera la nécessité. Les applications de projection correspondantes sont notées  $\pi_B$ ,  $\pi_H$  et  $\pi_U$ .

L'équation (11) se partage maintenant comme il suit:

$$(11') \quad \begin{aligned} a) \quad & \delta\varphi - \frac{1}{2}\pi_B[\varphi, \varphi]^\circ = 0 \\ b) \quad & \pi_H[\varphi, \varphi]^\circ = 0 \\ c) \quad & \pi_U[\varphi, \varphi]^\circ = 0 \end{aligned}$$

En se rappelant l'origine de (11), nous voyons que (11'.c) est équivalent à

$$(11'.c') \quad \pi_U[\mu + \varphi, \mu + \varphi]^\circ = 0.$$

Nous l'utiliserons sous cette forme.

Dans (11'.a) posons  $\varphi = z + u$ , où  $z \in Z^2$  et  $u \in U^2$ , et considérons  $z$  comme un paramètre. (11'.a) devient alors, puisque  $\delta z = 0$

$$(11'.a') \quad \delta u - \frac{1}{2}\pi_B[z + u, z + u]^\circ = 0.$$

Le côté gauche note, pour chaque  $z$ , une application qui envoie  $u \in U^2$  dans un cobord de  $B^3$ . Pour  $z = 0$ , cette application est justement  $u \mapsto \delta u$  qui est un isomorphisme entre  $U^2$  et  $B^3$ . Le théorème des fonctions implicites nous dit alors que pour un petit  $z$  on peut trouver un voisinage de  $u = 0$  qui est appliqué de manière biunivoque sur un ensemble ouvert de  $B^3$  et que l'origine de  $B^3$  est dans l'image. Désignons par  $\Phi(z)$  l'image inverse de 0; ainsi  $u = \Phi(z)$  est une solution de (11'.a'). Le théorème des fonctions implicites nous dit que  $\Phi$  paramétrise toutes les solutions petites  $\varphi = z + \Phi(z)$  et que  $\Phi$  est analytique.

Nous substituons maintenant  $\varphi = z + \Phi(z)$  dans (11'.b). Malheureusement on n'a aucune garantie que l'équation qui en résulte

$$(11'.b') \quad \Omega(z) = {}_{def} \pi_H[z + \Phi(z), z + \Phi(z)]^\circ = 0$$

a de nombreuses solutions. Cette équation correspond aux obstructions que nous avons trouvées dans la méthode des séries de puissances. C'est pourquoi, on appelle  $\Omega$  l'*application obstruction*.

En ce qui concerne la troisième équation (11'.c'), les choses vont mieux: pour les petits  $\varphi$  c'est une conséquence des deux premières équations (11'a, b), qu'il n'y a pas de conditions supplémentaires. Cela correspond au fait que dans la méthode des séries de puissances,  $F_{n+1}$  est automatiquement un cocycle. Pour prouver cela, nous avons seulement à montrer ce qui suit: si  $\varphi$  est tel que  $w = [\mu + \varphi, \mu + \varphi]^\circ$  appartient à  $U^3$  et si  $\varphi$  est petit, alors  $w = 0$ . Grâce à l'identité de Jacobi et avec les hypothèses faites nous avons

$$0 = [\mu + \varphi, [\mu + \varphi, \mu + \varphi]^\circ]^\circ = [\mu + \varphi, w]^\circ.$$

Or, on peut prendre pour  $w$  n'importe quel élément de  $U^3$  pour lequel  $[\mu + \varphi, w]^\circ = 0$  et nous montrons que c'est zéro quand  $\varphi$  est petit. Or  $w \mapsto [\mu, w]^\circ = -\delta w$  est une application de  $U^3$  dans l'espace des applications linéaires d'ordre 4 qui est une injection. Un changement: remplacer  $[\mu, .]^\circ$  par  $[\mu + \varphi, .]^\circ$  ne change pas la propriété (biunivoque) de l'injection quand  $\varphi$  est petit. (Le rang d'une application linéaire ne diminue pas par un petit changement.) Par suite, il y a dans  $U^3$  un seul  $w$  pour lequel  $[\mu + \varphi, w]^\circ = 0$  quand  $\varphi$  est petit; la seule valeur est évidemment  $w = 0$ .

Ainsi, toutes les petites solutions de (11) sont de la forme  $\varphi = z + \Phi(z)$ , où  $\Phi$  est analytique dans un voisinage du 0 de  $Z^2$  et où de plus  $z$  est limité par la condition  $\Omega(z) = 0$ ;  $\Omega$  est aussi analytique à valeurs dans  $H^3$ . (Notons que  $H^3(V, V) = 0$  entraîne que les petites solutions  $\varphi$  de (11) forment une variété locale sans singularités; son espace tangent est  $Z^2$ .)

Pour considérer les équivalences parmi les déformations, nous observons que dans le cas où  $\alpha : V \rightarrow V$  est inversible il lui correspond une transformation sur une multiplication  $\mu'$  donnée par  $\mu'(x, y) = \alpha^{-1} \mu(\alpha x, \alpha y)$ .

De façon analogue, à toute application, linéaire d'ordre  $n$ ,  $f$  correspond une nouvelle application appelée  $\sigma(\alpha)f$ :

$$(\sigma(\alpha)f)(x_1, \dots, x_n) = \alpha^{-1} f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

On a  $\mu' = \sigma(\alpha)\mu$ . Il est facile de voir à partir de la définition de  $\bar{o}$  que

$$\sigma(\alpha)(f \bar{o} g) = \sigma(\alpha)f \bar{o} \sigma(\alpha)g.$$

Ainsi, si on a  $\mu \bar{o} \mu = 0$ , on a aussi  $\sigma(\alpha)\mu \bar{o} \sigma(\alpha)\mu = 0$ . (Cela exprime le fait évident que des algèbres isomorphes à des algèbres associatives sont elles-mêmes associatives.) Si  $\alpha$  est près de l'application identité  $I$ ,  $\alpha$  est de la forme  $e^\beta$ , où  $\beta$  est une application linéaire.

*Lemme.* Si  $\beta : V \rightarrow V$  est linéaire et si  $f$  est une application linéaire d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $V$ , alors

$$\sigma(e^\beta)f = e^{\delta\beta}f,$$

où  $\delta_\beta f = [\beta, f]^\circ$ .

Pour montrer cela, nous remplaçons  $\beta$  par  $t\beta$  et nous différentions par rapport à  $t$ . Vu la définition de  $\sigma$  on a

$$\frac{d}{dt} \sigma(e^{t\beta})f = -\beta \bar{o} \sigma(e^{t\beta})f + \sigma(e^{t\beta})f \bar{o} \beta = [\beta, \sigma(e^{t\beta})f]^\circ = \delta_\beta \sigma(e^{t\beta})f.$$

Or  $\frac{d}{dt}$  et  $\delta_\beta$  commutent puisque  $\beta$  est indépendant de  $t$  et nous trouvons

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^N \sigma(e^{t\beta})f = \delta_\beta^N \sigma(e^{t\beta})f.$$

Si l'on pose  $t = 0$  c'est le coefficient de  $\frac{t^N}{N!}$  dans le développement en série de

Taylor de  $\sigma(e^{t\beta})f$ . Pour  $t = 0$ , le côté droit coïncide avec  $\delta_\beta^N f$ . Ainsi nous trouvons

$$\sigma(e^{t\beta})f = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{t^N}{N!} \left\{ \left(\frac{d}{dt}\right)^N \sigma(e^{t\beta})f \right\}_{t=0} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{t^N}{N!} \delta_\beta^N f = e^{t\delta\beta}f.$$

Il suffit de faire  $t = 1$  pour prouver le lemme.

Comme pour la notation  $\delta$ , on peut poser  $\delta_g f = [g, f]^\circ$ . On a alors  $\delta_\mu f = [\mu, f]^\circ = -\delta f$  de sorte que  $\delta = -\delta_\mu$ . Notons aussi que

$$\delta_\beta \mu = [\beta, \mu]^\circ = -[\mu, \beta]^\circ = \delta\beta.$$

L'action d'un opérateur  $\sigma(e^\beta)$  sur  $\mu$  donne quelque chose qui dépend du choix de  $\beta$ . Pour  $\beta \in Z^1(V, V)$  on a  $\delta\beta = \delta_\beta \mu = 0$  de telle sorte que  $\sigma(e^\beta) = e^{\delta\beta} \mu = \mu$ ; i.e.  $\mu$  ne change pas. Pour  $\beta \in Z^1(V, V)$ , les  $e^\beta$  appartiennent au groupe d'automorphismes de  $\mu$ . On peut ainsi voir que les  $e^\beta$  pour  $\beta \in U^1$  sont à vrai dire les seuls intéressants si l'on veut que  $\mu$  « bouge ». Comme alors  $\delta_\beta \mu$  n'est jamais zéro (excepté pour  $\beta = 0$ ), les éléments  $\sigma(e^\beta) \mu$ ,  $\beta \in U^1$ , sont tous distincts l'un de l'autre pour  $\beta$  petit et forment en  $\mu$  une variété locale dont l'espace tangent est  $B^2 = \delta U^1$ . Quand  $\mu'$  est distinct de  $\mu$  mais proche de  $\mu$ , l'ensemble des  $\sigma(e^\beta) \mu'$  pour  $\beta \in U^1$  proche de 0 forme aussi une variété locale dont l'espace tangent en  $\mu'$  est proche de  $B^2$ . Ainsi on voit intuitivement que pour  $\mu'$  près de  $\mu$  et  $\beta$

dans un voisinage de 0 contenu dans  $U^1$  toutes les orbites  $\sigma(e^\beta)\mu'$  se couperont en  $\mu$  suivant un sous-espace transversal à  $B^2$ . (Les considérations précédentes sont purement intuitives; le théorème des fonctions implicites fournit la preuve actuelle.) Ainsi si nous prenons le plan  $P$  passant par  $\mu$  dans la direction de  $H^2 + U^2$ , alors  $P$  contient en particulier au moins un point de l'ensemble des  $\sigma(e^\beta)\mu'$  pour tous les  $\mu'$  proches de  $\mu$ . Les  $\mu'$  associatifs dans  $P$  ont, cependant, justement la forme  $\mu + z + \Phi(z)$  où  $z$  est réduit à  $H^2$  et vérifie  $\Omega(z) = 0$ . Les  $\mu'$  considérés représentent toutes les classes d'équivalence des multiplications associatives proches de  $\mu$  et, comme nous le voyons, sont paramétrés par les zéros d'une application analytique  $\Omega$  de  $H^2$  à valeurs dans  $H^3$ .

De façon plus explicite: chaque structure associative  $\mu'$  proche de  $\mu$  est de la forme  $\mu' = \sigma(e^\beta)(\mu + z + \Phi(z))$  où  $z$  appartient à un voisinage de 0 contenu dans  $H^2$  et vérifie  $\Omega(z) = 0$  tandis que  $\beta$  appartient à un voisinage de 0 contenu dans  $U^1$ .

Dans le cas particulier où  $H^2(V, V) = 0$  cela signifie qu'il y a seulement une classe d'équivalence: celle de  $\mu$ . C'est-à-dire que toutes les multiplications associatives proches de  $\mu$  sont équivalentes à  $\mu$ . C'est une autre forme du théorème de rigidité.

On doit remarquer que bien que  $\sigma(e^\beta)\mu = \mu$  pour  $\beta \in Z^1$ , en général  $\sigma(e^\beta)\mu' \neq \mu'$  pour  $\mu'$  proche de  $\mu$  et pour le même  $\beta$ . Pour trouver les équivalences entre les  $\mu'$  proches de  $\mu$  on n'a pas pris les transformations en considération. Comme résultat, on peut en général trouver leurs équivalents parmi les  $\mu'$  de  $P$ .

## 7. Un exemple simple.

Nous calculerons les petites déformations de l'algèbre associative à deux dimensions  $V$  dont les éléments sont de la forme  $a + b\varepsilon$ , où  $a$  et  $b$  sont réels et  $\varepsilon^2 = 0$ . Une base de  $V$  sur les nombres réels est constituée par les éléments 1 et  $\varepsilon$ . Soit  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire,  $\delta f$  est donnée par

$$(\delta f)(1, 1) = 1 \cdot f(1) - f(1 \cdot 1) + f(1) \cdot 1 = f(1),$$

$$(\delta f)(1, \varepsilon) = (\delta f)(\varepsilon, 1) = 1 \cdot f(\varepsilon) - f(1 \cdot \varepsilon) + f(1) \cdot \varepsilon = \varepsilon f(1),$$

$$(\delta f)(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon \cdot f(\varepsilon) - f(\varepsilon \cdot \varepsilon) + f(\varepsilon) \cdot \varepsilon = 2\varepsilon f(\varepsilon).$$

Par suite,  $f$  est une dérivation si  $f(1) = 0$  et si  $f(\varepsilon)$  est un multiple de  $\varepsilon$ . L'espace  $Z^1 = H^1$  des dérivations est à une dimension et une base en est donnée par l'élément  $\zeta$  avec

$$\zeta(a + b\varepsilon) = b\varepsilon.$$

Soit maintenant une application bilinéaire  $\varphi$ . On peut alors calculer  $\delta\varphi$  de façon analogue. Cependant nous savons déjà que  $\delta(\delta f) = 0$  quand  $f$  est linéaire. Aussi pouvons nous restreindre  $\varphi$  à un sous-espace  $W$  complémentaire à  $B^2$  et dont les éléments ont la propriété que  $\varphi(1, 1) = 0$  et  $\varphi(\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbf{R}$ . Pour ces  $\varphi$  là, on trouve

$$\begin{aligned} (\delta\varphi)(1, 1, 1) &= (\delta\varphi)(1, \varepsilon, 1) = (\delta\varphi)(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) = 0, \\ (\delta\varphi)(1, 1, \varepsilon) &= \varphi(1, \varepsilon), (\delta\varphi)(\varepsilon, 1, 1) = -\varphi(\varepsilon, 1), \\ (\delta\varphi)(1, \varepsilon, \varepsilon) &= -\varepsilon\varphi(1, \varepsilon), (\delta\varphi)(\varepsilon, \varepsilon, 1) = -\varphi(\varepsilon, 1), \\ (\delta\varphi)(\varepsilon, 1, \varepsilon) &= \varepsilon(\varphi(1, \varepsilon) - \varphi(\varepsilon, 1)). \end{aligned}$$

Les  $\varphi$  pour lesquels  $\delta\varphi = 0$  donnent  $H^2$ . Ils sont caractérisés par  $\varphi(1, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon, 1) = 0$  — et naturellement  $\varphi(1, 1) = 0$  et  $\varphi(\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbf{R}$ . Donc  $H^2$  est à une dimension et est engendré par l'application  $z$  avec  $z(\varepsilon, \varepsilon) = 1$ ,  $z$  étant nul pour toutes les autres paires d'éléments de la base. Pour ce  $z$ , on a  $z \bar{o} z = 0$ . Si  $\varphi = z + u$  est une solution de (11), alors on a dans ce cas

$$\delta u + (z \bar{o} u + u \bar{o} z + u \bar{o} u) = 0,$$

qui est vérifié pour  $u = 0$ . Ainsi si  $t$  est un paramètre réel, les multiplications déformées sont  $\mu' = \mu + tz$ ; i.e.

$$\mu'(a + b\varepsilon, c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon + t \cdot bd,$$

ou encore

$$\mu'(1, 1) = 1, \quad \mu'(1, \varepsilon) = \mu'(\varepsilon, 1) = \varepsilon, \quad \mu'(\varepsilon, \varepsilon) = t.$$

On distingue  $t > 0$  et  $t < 0$  en posant  $t = \pm k^2$ . Avec le nouvel élément de base  $\varepsilon' = \varepsilon/k$  on a

$$\mu'(\varepsilon', \varepsilon') = \pm 1$$

et

$$\mu'(a + b\varepsilon', c + d\varepsilon') = (ac \pm bd) + (ad + bc)\varepsilon'.$$

Ainsi toutes les structures correspondant à  $t > 0$  sont isomorphes et il en est ainsi pour celles qui correspondent à  $t < 0$ . Les dernières sont justement les nombres complexes.

Comme exercice, on peut vouloir calculer le produit de  $z$  et de  $\zeta$ . On observe que  $\zeta(\varepsilon)$  et  $z(\varepsilon, \varepsilon)$  sont les seuls éléments non nuls et que les valeurs de  $\zeta$  sont des multiples de  $\varepsilon$ ; celles de  $z$  des multiples de 1. D'où  $\zeta \bar{o} z = 0$ .

On trouve

$$[\zeta, z]^\circ(\varepsilon, \varepsilon) = (z\bar{\partial}\zeta)(\varepsilon, \varepsilon) = z(\zeta(\varepsilon), \varepsilon) + z(\varepsilon, \zeta(\varepsilon)) = 2 = 2z(\varepsilon, \varepsilon),$$

tandis que les autres valeurs de  $[\zeta, z]^\circ$  et de  $z$  sont zéro. Autrement dit,

$$[\zeta, z]^\circ = 2z.$$

L'espace ne nous permet pas d'expliquer comment cette formule est liée au fait que  $\mu$  est une structure de « saut »: il change une fois (dans chaque direction de  $t$ ); ensuite la structure reste constante. C'est un cas particulier de la situation décrite dans la dernière remarque de la section 6.

### PARTIE III: *Algèbres de Lie et algèbres de Vinberg*

— *plus sur les déformations* —  
*systèmes de composition*

#### *Introduction.*

Le produit de composition pour des algèbres associatives a été introduit dans la partie II, de même que quelques applications — principalement celles concernant les déformations de telles algèbres. Cependant les possibilités du produit de composition n'ont pas été là épuisées: il prête lui-même à d'autres questions de déformation qui sont mentionnées dans la partie présente: déformations d'homomorphismes d'algèbres et déformations de sous-algèbres. Le crochet  $[,]^\circ$  de la partie II était à vrai dire un commutateur de produits de composition: on peut le comparer avec l'algèbre de Lie des commutateurs d'une algèbre de Vinberg. On montre maintenant que le produit de composition « plus fin » permet la construction d'autres structures graduées de Lie notées  $[,]^\vee$  et  $[,]$  qu'on ne pourrait obtenir à partir de  $[,]^\circ$  seul. Les nouveaux crochets sont utilisés pour les déformations d'homomorphismes et de sous-algèbres.

Les considérations de cette sorte ne sont nullement limitées aux algèbres associatives: notre première tâche consiste à définir les produits de composition pour les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg de telle façon qu'ensuite toutes les discussions s'appliquent également aux trois types d'algèbres. (Elles s'appliquent aussi aux algèbres associatives et commutatives; cf. les notes bibliographiques.) Quoiqu'on n'ait pas beaucoup à dire en ce qui concerne les produits de composition dans les algèbres de Lie et les algèbres de Vinberg (tous les commentaires antérieurs s'appliquent presque mot pour mot) nous avons pensé appuyer sur leur utilité en donnant un exemple de déformation d'algèbre de Lie.

L'utilité « universelle » du produit de composition que nous avons ainsi exhibé nous conduit à la question que peut-être d'autres types d'algèbres pourraient admettre aussi des produits de composition. A vrai dire, s'il en est ainsi, alors il y aurait pour chacun de ces types une théorie toute faite de la cohomologie et des sortes variées de déformations attendant pour être appliquées. Les algèbres de Vinberg peuvent par exemple être considérées comme un exemple de type d'algèbre pour lequel on attendait une théorie toute faite.

De façon à asseoir la théorie de façon suffisamment ferme pour permettre de telles théories toutes faites, il est nécessaire de réduire non seulement toutes les définitions mais aussi toutes les preuves de théorèmes à des propriétés explicitement énoncées du produit de composition. L'espace ne nous permet pas la pleine exécution d'un tel programme. Cependant, nous donnons un exposé explicite des propriétés requises du produit de composition (introduisant là les *systèmes de composition*), et montrons comment certaines propriétés décisives suivent des axiomes.

### 8. Un deuxième produit de composition.

On a montré que le produit de composition introduit dans la section 4 est justement la pièce de mécanisme qu'il faut pour un certain nombre de questions liées aux algèbres associatives. Nous introduisons maintenant — dans un style beaucoup plus bref — un deuxième produit de composition qui fait de même pour les algèbres de Lie de façon si semblable qu'il y a réellement très peu à dire. La répétition de la même histoire ne servirait aucun but; il est assez de suggérer que le lecteur se convainque lui-même en parcourant une fois encore le matériel.

Nous prenons à nouveau un espace vectoriel  $V$  et prenons pour applications linéaires d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $V$  seulement celles d'entre elles qui sont alternées. Pour deux telles applications,  $f$  et  $g$  (la dernière étant linéaire d'ordre  $m$ ) on définit  $f \barwedge g$  (prononcez  $f$  « hook »  $g$ ) par

$$(12) \quad (f \barwedge g)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) = \\ = \sum sg \tau f(g(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(m)}), x_{\tau(m+1)}, \dots, x_{\tau(n+m-1)}) ,$$

où la sommation est sur les permutations  $\tau$  de  $\{1, \dots, n+m-1\}$  pour lesquelles

$$\tau(1) < \dots < \tau(m) \quad \text{et} \quad \tau(m+1) < \dots < \tau(n+m-1) .$$

On peut aussi sommer sur toutes les permutations et diviser par  $m! (n-1)!$ . Notons que pour que cette formule ait un sens les valeurs de  $f$  n'ont pas

besoin d'être dans  $V$  mais peuvent appartenir à n'importe quel espace vectoriel.

La relation avec les algèbres de Lie est la suivante: si  $\mu$  est une application bilinéaire alternée de  $V$  dans  $V$ , alors  $\mu$  définit une structure d'algèbre de Lie si et seulement si  $\mu \barwedge \mu = 0$ . Une copie donne la vérification immédiate de l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} (\mu \barwedge \mu)(x, y, z) &= \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(x, z), y) + \mu(\mu(y, z), x) = \\ &= \mu(\mu(x, y), z) + \mu(\mu(y, z), x) + \mu(\mu(z, x), y). \end{aligned}$$

Une fois donnée la définition de  $\barwedge$  on répète avec presque une monotonie assommante en prenant  $\baro$  comme modèle: (9) est valable (la preuve suit la même idée),  $[,]^\circ$  est défini comme dans le dernier théorème de la section 4 et donne à nouveau une structure d'algèbre de Lie graduée. Le cobord  $\delta$  est défini comme auparavant par  $\delta f = -[\mu, f]^\circ$ . En considérant le produit semi-direct d'une algèbre de Lie et d'un module on trouve pour  $\delta f$  dans le cas où  $f$  est une application d'ordre  $n$  alternée de  $V$  dans  $M$  la formule:

$$\begin{aligned} (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} f(\mu(x_i, x_j), x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

qui dans cette situation est exactement la formule classique.

Les applications et les exemples des sections 4 et 5 peuvent être répétés presque mot pour mot. La théorie de la déformation de la section 6 marche sans changement perceptible.

On doit faire une petite modification dans l'exemple 3 de la section 5. Le groupe des automorphismes intérieurs d'une algèbre de Lie doit être défini différemment. On utilise le fait qu'à chaque algèbre de Lie correspond un groupe de Lie (pas du tout unique) et que les automorphismes intérieurs de ce groupe (donnés par les applications de la forme  $b \mapsto aba^{-1}$ ) induisent un groupe d'automorphismes de l'algèbre de Lie. (Le groupe est unique si par exemple nous exigeons qu'il soit connexe.) L'algèbre de Lie est exactement  $B^1(V, V)$ . Toutes les remarques ultérieures de l'exemple 3 continuent à s'appliquer.

## 9. Un autre exemple.

Nous étudions maintenant les déformations d'une algèbre de Lie  $V$  de dimension trois ayant pour base  $p, q, \mathbf{1}$  telle que

$$\mu(p, q) = \mathbf{1}, \quad \mu(q, \mathbf{1}) = \mu(\mathbf{1}, p) = 0;$$

les physiciens la nomment d'après Heisenberg. En vue de la simplicité, nous considérerons les équivalences sur les nombres complexes de sorte que  $V$  sera un espace vectoriel complexe. (Autrement il faudrait distinguer entre les racines réelles et les racines imaginaires des équations, etc.).

Soit  $f : V \rightarrow V$  une application linéaire, on a alors

$$(\delta f)(p, q) = \mu(p, f(q)) - \mu(q, f(p)) - f(\mu(p, q)) = \mu(p, f(q)) - \\ - \mu(q, f(p)) - f(\mathbf{1}),$$

$$(\delta f)(q, \mathbf{1}) = \mu(q, f(\mathbf{1})) - \mu(\mathbf{1}, f(q)) - f(\mu(q, \mathbf{1})) = \mu(q, f(\mathbf{1})),$$

$$(\delta f)(\mathbf{1}, p) = \mu(\mathbf{1}, f(p)) - \mu(p, f(\mathbf{1})) - f(\mu(\mathbf{1}, p)) = -\mu(p, f(\mathbf{1})).$$

Soit

$$f(x) = f_1(x)\mathbf{1} + f_p(x)p + f_q(x)q,$$

de telle sorte que  $f_1(x)$ , etc., sont les composantes de  $f(x)$ ; on a alors

$$(\delta f)(p, q) = (f_q(q) + f_p(p) - f_1(\mathbf{1})\mathbf{1} - f_p(\mathbf{1})p - f_q(\mathbf{1})q),$$

$$(\delta f)(q, \mathbf{1}) = -f_p(\mathbf{1})\mathbf{1},$$

$$(\delta f)(\mathbf{1}, p) = -f_q(\mathbf{1})\mathbf{1}.$$

Par suite,  $f$  est une dérivation si et seulement si

$$f_p(\mathbf{1}) = f_q(\mathbf{1}) = f_q(q) + f_p(p) - f_1(\mathbf{1}) = 0.$$

De plus,  $B^2$  est engendré par les applications bilinéaires alternées  $\varphi$  pour lesquelles (en utilisant pour les composantes une notation analogue)

$$\varphi_1(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(p, q), \quad \varphi_1(\mathbf{1}, p) = \varphi_q(p, q),$$

$$\varphi_q(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(\mathbf{1}, p) = \varphi_q(\mathbf{1}, p) = 0.$$

Un espace complémentaire à  $B^2$  est formé des  $\varphi$  pour lesquels  $\varphi_1 = 0$ . Soit  $\varphi \in W$ ; on calcule  $\delta\varphi$ :

$$(\delta\varphi)(p, q, \mathbf{1}) = \mu(p, \varphi(q, \mathbf{1})) + \mu(q, \varphi(\mathbf{1}, p)) + \mu(\mathbf{1}, \varphi(p, q)) + \\ - \varphi(\mu(p, q), \mathbf{1}) - \varphi(\mu(q, \mathbf{1}), p) - \varphi(\mu(\mathbf{1}, p), q) = \\ \varphi_p(q, \mathbf{1})\mathbf{1} - \varphi_p(\mathbf{1}, p)\mathbf{1} + 0 - 0 - 0 - 0.$$

Ainsi on a  $\delta\varphi = 0$  pour  $\varphi \in W$  si et seulement si  $\varphi_p(q, \mathbf{1}) = \varphi_p(\mathbf{1}, p)$ . Les composantes encore libres d'un cocycle  $\varphi$  de  $W$  sont donc

$$\varphi_p(q, \mathbf{1}), \quad \varphi_q(q, \mathbf{1}), \quad \varphi_q(\mathbf{1}, p), \quad \varphi_p(p, q), \quad \varphi_q(p, q),$$

tandis que  $\varphi_p(\mathbf{1}, p)$  doit être égal à  $\varphi_q(q, \mathbf{1})$  et que  $\varphi_1 = 0$ . Donc  $H^2$  est de dimension 5. Un espace complémentaire  $U^2$  consiste en les  $\varphi$  pour lesquels  $\varphi_p(\mathbf{1}, p)$  est libre tandis que les autres valeurs sont zéro.

L'équation de déformation est

$$\delta u - (z + u) \barwedge (z + u) = 0,$$

où on doit prendre  $z$  dans  $H^2$  et  $u$  dans  $U^2$ . D'après le calcul précédent on a

$$(\delta u)(p, q, \mathbf{1}) = -u_p(\mathbf{1}, p)\mathbf{1}.$$

Comme les valeurs de  $z$  et de  $u$  sont dans le sous-espace engendré par  $p$  et  $q$ , il en est de même de  $(z + u) \barwedge (z + u)$ . Puisque les valeurs de  $\delta u$  sont des multiples de  $\mathbf{1}$ , il s'en suit que  $u$  peut satisfaire à l'équation de déformation seulement pour  $\delta u = 0$ , i.e.  $u = 0$ . Par suite, nous trouvons que toutes les déformations dans  $P$  sont données par  $\mu' = \mu + z$  avec  $z \in H^2$  et  $z \barwedge z = 0$ . (La dernière équation est exactement  $\Omega(z) = 0$ .)

Nous avons donc

$$(z \barwedge z)(p, q, \mathbf{1}) = z(z(p, q), \mathbf{1}) + z(z_p(q, \mathbf{1})p + z_q(q, \mathbf{1})q, p) + z(z_p(\mathbf{1}, p)p + z_q(\mathbf{1}, p)q, q).$$

Les deux derniers termes s'éliminent puisque  $z_q(q, \mathbf{1}) = z_p(\mathbf{1}, p)$ ; ainsi  $z \wedge z = 0$  est équivalent à

$$z(z(p, q), \mathbf{1}) = 0.$$

Cela termine réellement la partie théorique du problème de déformation. Nous utilisons maintenant des méthodes classiques pour trouver les solutions.

Pour résoudre l'équation, nous considérons l'application  $\alpha : x \mapsto z(x, \mathbf{1})$  de  $x$  dans l'espace  $X$  engendré par  $p$  et  $q$ . Les composantes relativement à la base  $p, q$  de  $X$  sont données par la matrice

$$\begin{bmatrix} z_p(p, \mathbf{1}) & z_q(p, \mathbf{1}) \\ z_p(q, \mathbf{1}) & z_q(q, \mathbf{1}) \end{bmatrix}$$

Comme cette matrice a pour trace zéro, la forme canonique de Jordan est

$$(a) \quad \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{on} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons encore  $p, q$  la base par rapport à laquelle est assurée une de ces formes. On peut supposer que la transformation qui mène de l'ancienne base à la nouvelle a pour déterminant 1; alors  $\mu(p, q)$  ne change pas.

Nous distinguons plusieurs cas.

*Cas 1.*  $z(p, q) = 0$ . La forme (a) n'a lieu alors que pour  $\lambda \neq 0$ , car sinon on a  $z = 0$  (donc aucune déformation). On trouve (cas 1a)

$$\mu'(p, q) = \mathbf{1}, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = \lambda q, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = \lambda p.$$

En prenant la base  $(p/\lambda^{1/2}, q/\lambda^{1/2}, \mathbf{1}/\lambda)$  on obtient une réduction de plus

$$\begin{array}{ll} \mu'(p, q) = \mathbf{1}, \\ \text{cas 1a} \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = q, \\ \mu'(\mathbf{1}, p) = p. \end{array}$$

Dans le cas (b) on trouve

$$\begin{array}{ll} \mu'(p, q) = \mathbf{1}, \\ \text{cas 1b} \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = p, \\ \mu'(\mathbf{1}, p) = 0. \end{array}$$

*Cas 2.*  $z(p, q) \neq 0$ . Dans ce cas,  $z(p, q)$  est un vecteur nul pour  $\alpha$ , donc  $\lambda = 0$  et  $z(p, q)$  est un multiple de  $p$ ; disons  $z(p, q) = ap$  par rapport à une base convenable. Dans le cas (a) on trouve

$$\mu'(p, q) = \mathbf{1} + ap, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = 0, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = 0.$$

Par rapport à la base  $(ap + \mathbf{1}, q, \mathbf{1})$  cela devient

$$\begin{array}{ll} \mu'(p, q) = p, \\ \text{cas 2a} \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = 0, \\ \mu'(\mathbf{1}, p) = 0. \end{array}$$

Considérons maintenant à nouveau le cas (b); alors

$$\mu'(p, q) = \mathbf{1} + ap, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = p, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = 0,$$

où  $a \neq 0$ . Tout élément  $\eta$  qui n'est pas dans le plan  $Y$  de  $\mathbf{1}$  et de  $p$  induit une application  $y \mapsto \mu'(y, \eta)$ ; elles diffèrent toutes uniquement par un facteur.

Pour  $\eta = q$ , nous avons  $\beta : y \mapsto \mu'(y, q)$ . La matrice de  $\beta$  est  $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ; son

polynôme caractéristique est  $\lambda^2 - a\lambda + 1$ . Le discriminant  $a^2 - 4$  est  $\neq 0$  pour  $a \neq \pm 2$ , de telle façon que les valeurs propres  $\lambda$  et  $1/\lambda$  sont soit distinctes de  $\pm i$  (puisque  $a \neq 0$ ) ou toutes deux égales à  $\pm 1$ . Dans le premier cas une base pour  $Y$  existe (encore notée  $(p, \mathbf{1})$  telle que

$$\mu'(p, q) = \lambda p, \quad \mu'(q, \mathbf{1}) = -\lambda^{-1} \mathbf{1}, \quad \mu'(\mathbf{1}, p) = 0.$$

On divise  $q$  par  $\lambda$ , on pose  $-1/\lambda^2 = \tau$  et on trouve

$$\mu'(p, q) = p, (\tau \neq 0, \pm 1).$$

*cas 2b'*     $\mu'(q, \mathbf{1}) = \tau \mathbf{1},$

$$\mu'(\mathbf{1}, p) = 0.$$

Les cas  $\tau$  et  $1/\tau$  sont équivalents: changer  $p$  et  $\mathbf{1}$  et remettre  $q$  à l'échelle.

Dans le dernier cas, la matrice de  $\beta$  est  $\begin{bmatrix} \pm 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

qui est équivalente à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les  $\mu'$  correspondants sont équivalents; pour le premier on trouve

$$\begin{aligned} \mu'(p, q) &= p, \\ \text{cas 2b''} \quad \mu'(q, \mathbf{1}) &= -\mathbf{1} - p, \\ \mu'(\mathbf{1}, p) &= 0. \end{aligned}$$

Toutes les structures suivantes peuvent à vrai dire être atteintes par de petites déformations arbitraires:

$$\text{Cas 1a. } z(p, q) = 0, \quad z(p, \mathbf{1}) = -tp, \quad z(q, \mathbf{1}) = tq,$$

$$\text{Cas 1b. } z(p, q) = 0, \quad z(p, \mathbf{1}) = 0, \quad z(q, \mathbf{1}) = tp,$$

$$\text{Cas 2a. } z(p, q) = tp, \quad z(p, \mathbf{1}) = 0, \quad z(q, \mathbf{1}) = 0,$$

$$\text{Cas 2b. } z(p, q) = tap, \quad z(p, \mathbf{1}) = 0, \quad z(q, \mathbf{1}) = -tp.$$

## 10. Un troisième produit de composition

Pour étudier les algèbres de Vinberg on a encore besoin d'un autre produit de composition. Le trait qui le distingue principalement est qu'il est beaucoup moins connu que les deux autres. Nous le noterons  $\mathcal{C}$ . Les fonctions linéaires d'ordre  $n$  que nous considérons sont celles qui sont alternées par rapport aux  $n - 1$  premières variables. Il est parfois utile de les considérer aussi comme des applications alternées, d'ordre  $n - 1$ ,  $f'$  de  $V$  à valeurs dans l'espace  $\text{End}(V)$ , des applications linéaires  $V \rightarrow V$ .

Supposons maintenant que  $f$  est comme ci-dessus, et  $g$  de même mais linéaire d'ordre  $m$ . Alors  $f \mathcal{C} g$  est de la même sorte, linéaire d'ordre  $n + m - 1$  et donné par

$$(f \mathcal{C} g)(x_1, \dots, x_{n+m-1}) =$$

$$= \sum_1 sg \sigma f(g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m-1)}, x_{\sigma(m)}), x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(m+n-2)}, x_{n+m-1}) + \\ + (-1)^{(m-1)(n-1)} \sum_2 sg \sigma f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}, \\ g(x_{\sigma(n)}, \dots, x_{\sigma(n+m-2)}, x_{n+m-1})),$$

où  $\sum_1$  porte sur toutes les permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n+m-2\}$  telles que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(m-1)$  et  $\sigma(m+1) < \dots < \sigma(n+m-2)$  tandis que la somme  $\sum_2$  porte sur les permutations  $\sigma$  vérifiant  $\sigma(1) < \dots < \sigma(n-1)$  et  $\sigma(n) < \dots < \sigma(n+m-2)$ . Notons que  $g$  est complètement antisymétrique par rapport à la première somme, mais ne l'est pas par rapport à la deuxième. Notons aussi que  $x_{n+m-1}$  n'est dans aucune des permutations.

Une forme plus courte pour la définition de  $f \mathcal{C} g$  est obtenue à l'aide de  $f'$  et  $g'$ , les applications alternées linéaires d'ordre  $(n-1)$  resp.  $(m-1)$  de  $V$  dans  $\text{End } V$ . Nous avons besoin aussi de  $\hat{g}$  le  $g$  complètement alterné, ainsi  $\hat{g}$  est une application linéaire d'ordre  $m$  de  $V$  dans  $V$ .

Avec ces conventions on a

$$(f \mathcal{C} g)' = f' \barwedge \hat{g} + (-1)^{(m-1)(n-1)} f' \wedge g'.$$

Notons que  $f' \wedge g'$  est le produit extérieur de deux formes alternées à valeurs dans l'algèbre (associative)  $\text{End } V$ ; comme cette algèbre n'est pas commutative, il n'y a pas de relation simple entre  $f' \wedge g'$  et  $g' \wedge f'$ . La deuxième forme est plus commode pour prouver (9) en ce qui concerne  $\mathcal{C}$ .

Lorsque  $\mu$  est une application bilinéaire de  $V$  dans  $V$ ,  $\mu \mathcal{C} \mu = 0$  est juste la condition (1); en fait

$$(\mu \mathcal{C} \mu)(x, y, z) = \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(y, x), z) - \mu(x, \mu(y, z)) + \\ + \mu(y, \mu(x, z)).$$

Le produit de composition associé aux algèbres de Vinberg, comme on l'a donné, diffère de celui qui a été donné pour les algèbres associatives et les algèbres de Lie par un aspect important: les applications multilinéaires pour lesquelles il est défini ont un degré positif: les produits  $f \mathcal{C} x$  (avec  $x \in V$ ) n'ont pas été définis. Nous les poserons arbitrairement égaux à zéro. La signification la plus profonde de la difficulté à trouver une définition naturelle de  $f \mathcal{C} x$  vient du fait que les commutateurs (voir le cas  $n=0$  de la section 4: « dérivations intérieures ») ne donnent *pas* des dérivations dans les algèbres de Vinberg. Les exemples 1 et 3 de la section 5 deviennent vides:  $B^1(V, M) = 0$  et le groupe des automorphismes intérieurs se réduit à l'identité.

Toutes les autres remarques faites dans la section 8 pour les algèbres de Lie valent maintenant pour les algèbres de Vinberg avec seulement les

modifications évidentes. Nous copions la formule des cobords. Rappelons que  $\delta f = -f \zeta \mu + (-1)^{n-1} \mu \zeta f$ :

$$\begin{aligned}
 (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_i) x_n - \\
 &- \sum_{i < j < n} (-1)^{i+j+1} f([x_i, x_j], \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) - \\
 &- \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_i x_n).
 \end{aligned}$$

Les deux premières sommes viennent de la partie  $\mu \zeta f$ , les autres de  $f \zeta \mu$ . Notons à nouveau que  $x_n$  est toujours la dernière variable; il n'est sujet à aucune des sommations.

Nous récrivons, en utilisant  $f'$ , le cobord et trouverons ainsi une relation avec la cohomologie de l'algèbre de Lie.

$$\begin{aligned}
 (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \{ x_i \{ f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_n \} - \\
 &\quad - f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})(x_i x_n) + \\
 &\quad + \{ f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_i \} x_n \} - \\
 &- \sum_{i < j < n} (-1)^{i+j+1} f'([x_i, x_j], \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}) x_n.
 \end{aligned}$$

L'expression intérieure aux grandes accolades de la première somme peut être écrite

$$\begin{aligned}
 \{ L_{x_i} f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) - f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) L_{x_i} + \\
 + L_{f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_i} \} x_n
 \end{aligned}$$

En comparant cela avec l'exemple du module de Vinberg  $\text{End}(V)$  de la section 3, on voit (en utilisant la même notation) que

$$\begin{aligned}
 (\delta f)(x_0, \dots, x_n) &= \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \lambda(x_i, f'(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})) x_n - \\
 &- \sum_{i < j < n} (-1)^{i+j+1} f'([x_i, x_j], \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}) x_n.
 \end{aligned}$$

C'est la formule des cobords de la section 8 puisque, comme nous le rappelons,  $x \mapsto \lambda(x, \alpha)$  est une représentation (à gauche) de l'algèbre de Lie

$V_{Lie}$  associée à l'algèbre de Vinberg  $V$ . Avec des notations évidentes par elles-mêmes nous avons donc:

$$(\delta_{Vinberg} f)' = \delta_{Lie} f'.$$

Une conséquence directe de cela est

$$H^n(V, V) \cong H^{n-1}(V_{Lie}, \text{End}(V)).$$

De nombreuses propriétés de la cohomologie des algèbres de Vinberg peuvent donc être déduites de la cohomologie des algèbres de Lie. Notons, cependant, que la structure de Vinberg n'a pas été perdue dans cet isomorphisme. Elle a été utilisée essentiellement par la définition sur  $\text{End}(V)$  d'une structure inaccoutumée (à savoir,  $\lambda$ ) de module sur  $V_{Lie}$ .

Comme dans le cas associatif et le cas de Lie, la cohomologie de  $V$  à coefficients dans  $V$  induit une structure graduée de Lie  $[,]^\circ$ . On peut se demander si, vu l'isomorphisme précédent, cela peut être « expliqué » par quelque structure graduée de Lie connue portant sur la cohomologie de  $V_{Lie}$  à coefficients dans  $\text{End}(V)$ . La réponse n'est pas connue pour l'instant.

### 11. *Le cup-crochet.*

Jusqu'à maintenant tous les problèmes que nous avons considérés tournent autour du crochet  $[,]^\circ$  que nous pouvons appeler le crochet de composition. Nous avons montré, par exemple, que l'opérateur cobord et les problèmes de déformation peuvent s'exprimer au moyen de ce produit seul. Si nous utilisons  $\bar{o}$  (ou  $\wedge$  ou  $\zeta$ ) avant tout, c'est parce que  $\varphi \bar{o} \varphi$  est plus facile à écrire (ou à copier) que  $\frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\circ$ .

Cependant en principe,  $[,]^\circ$  et ses propriétés suffiraient pour les parties théoriques et la structure « plus fine »  $\bar{o}$  n'était pas nécessaire.

Dans cette section nous introduisons le cup-crochet  $[,]^\cup$  qui peut être défini au moyen de  $\bar{o}$  seul, mais ne peut pas l'être au moyen de  $[,]^\circ$ . Ainsi sa définition dépend de la structure disponible la plus fine.

En partant pour l'instant sur une ligne plus intuitive, nous considérons un homomorphisme arbitraire  $h : V \rightarrow V'$  d'algèbres dont on désigne les produits par  $\mu$  et  $\mu'$ . Ainsi  $h$  vérifie

$$h\mu(x, y) = \mu'(hx, hy).$$

Si  $\varphi : V \rightarrow V'$  est linéaire, alors  $h + \varphi$  est un autre homomorphisme (à vrai dire déformé) si

$$(h + \varphi)\mu(x, y) = \mu'((h + \varphi)x, (h + \varphi)y).$$

En utilisant la formule ci-dessus on peut récrire cela

$$\mu'(hx, \varphi y) - \varphi\mu(x, y) + \mu'(\varphi x, hy) + \mu'(\varphi x, \varphi y) = 0.$$

Or  $V'$  est un  $V$ -module via  $h$ ; dans le cas associatif et dans le cas de Vinberg donné par

$$\lambda(x, y') = \mu'(hx, y'), \quad \rho(x', y) = \mu'(x', yh),$$

et dans le cas de Lie par seulement la première de ces formules. Dans les trois cas, les premiers trois termes sont exactement  $(\delta\varphi)(x, y)$ . Le dernier terme est par une définition que nous allons donner tout à l'heure égal à  $\frac{1}{2}[\varphi, \varphi]^\cup(x, y)$ . L'équation de déformation devient ainsi

$$\delta\varphi + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi]^\cup = 0;$$

c'est la forme habituelle (cf. (11)), quoique le degré de  $\varphi$ , l'image de  $\varphi$  et le crochet soient différents.

Pour les algèbres associatives le cup-produit est bien connu. Soit  $f, g$  des applications linéaires d'ordre  $n$  resp.  $m$  de  $V$  dans  $V'$ ; alors  $f \cup g$  est donné par

$$(f \cup g)(x_1, \dots, x_{n+m}) = \mu'(f(x_1, \dots, x_n), g(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})).$$

Le cup-produit est évidemment associatif, et on peut montrer aisément que  $\delta$  est une dérivation:

$$\delta(f \cup g) = \delta f \cup g + (-1)^n f \cup \delta g.$$

Il s'en suit (voir la section 5) qu'un cup-produit est induit dans la cohomologie de  $V$  à coefficients dans  $V'$ . En prenant les commutateurs

$$[f, g]^\cup = f \cup g - (-1)^{mn} g \cup f$$

on obtient une structure graduée d'algèbre de Lie: le cup-crochet. Naturellement  $\delta$  est encore une dérivation.

Dans le cas des algèbres de Lie  $V, V'$  on définit  $[,]^\cup$  directement:

$$\begin{aligned} [f, g]^\cup(x_1, \dots, x_{n+m}) &= \\ &= \sum sg \sigma \mu' (f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), g(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m)})), \end{aligned}$$

avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(n) \quad \text{et} \quad \sigma(n+1) < \dots < \sigma(n+m).$$

Le cup-crochet définit une structure graduée d'algèbre de Lie, et  $\delta$  est une dérivation par rapport à  $[,]^\cup$ .

Dans le cas des algèbres de Vinberg on pose

$$(f \cup g)(x_1, \dots, x_{n+m}) = \\ = \sum sg \sigma \mu' (f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}), g(x_{\sigma(n+1)}, \dots, x_{\sigma(n+m-1)}, x_{n+m}))$$

avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(n-1) \quad \text{et} \quad \sigma(n+1) < \dots < \sigma(n+m-1).$$

Notons que l'on ne permute pas  $x_{n+m}$  et qu'on a symétrisé à gauche  $f$ . Ce produit vérifie

$$(f \cup g) \cup k - f \cup (g \cup k) = (-1)^{mn} \{ (g \cup f) \cup k - g \cup (f \cup k) \},$$

de telle sorte que les commutateurs définissent une algèbre de Lie graduée (le cup-crochet)  $[,]^\cup$ ; cf. la fin de la section 4 pour une situation semblable. L'application  $f \mapsto f \zeta \mu$  est une dérivation par rapport à  $\cup$ ; donc aussi par rapport à  $[,]^\cup$ . De façon analogue,  $f \mapsto (-1)^n \mu \zeta f = (-1)^n f \cup h - h \cup f = -[h, f]^\cup$  est une dérivation par rapport à  $[,]^\cup$  grâce à l'identité de Jacobi. Par suite  $\delta$  est une dérivation par rapport à  $[,]^\cup$ ; cependant ce n'est pas une dérivation par rapport à  $\cup$ .

Ainsi, nous avons, dans les trois cas, un cup-crochet  $[,]^\cup$  qui donne une structure graduée de Lie et pour laquelle  $\delta$  est une dérivation. De plus, si  $\varphi : V \rightarrow V'$  est linéaire, alors dans les trois cas

$$\frac{1}{2} [\varphi, \varphi]^\cup (x, y) = \mu' (\varphi x, \varphi y).$$

Cela justifie la notation de l'équation de déformation.

Comme affirmé au début de cette section,  $[f, g]^\cup$  peut être exprimé au moyen du produit de composition resp.  $\bar{o}$ ,  $\bar{\wedge}$  et  $\zeta$ . Nous le montrons d'abord pour  $V' = V$ . La preuve est assez simple dans les trois cas pourvu qu'on aille réellement dans les détails de la déduction de (9) qui utilisent les suggestions qui suivent (9). La comparaison de la preuve et de la définition de  $[,]^\cup$  nous montrera alors que

$$[f, g]^\cup = (-1)^{m-1} \{ (\mu \bar{o} g) \bar{o} f - \mu \bar{o} (g \bar{o} f) \},$$

et de même pour  $\bar{\wedge}$  et  $\zeta$ . Dans les trois cas il est utile de considérer d'abord le terme en  $\mu \bar{o} g$  resp.  $\mu \zeta g$  pour lequel  $g$  occupe par rapport à  $\mu$  la seconde place; pour  $\mu \bar{\wedge} g$  nous bougerons simplement  $g$  pour qu'il soit à la seconde place — ensuite nous appliquons sur la droite  $\bar{o} f (\zeta f$  resp.  $\bar{\wedge} f)$ . Le lecteur peut à nouveau suppléer aux détails complémentaires. Notons que (9) implique

$$[f, g]^\cup = (-1)^{mn+1} [g, f]^\cup.$$

La formule donnant  $[f, g]^\vee$  peut être résumée si on se rappelle que  $\mu \bar{o} g$  est un terme de  $\delta g$ ; de façon analogue  $\mu \bar{o} (\bar{g} \bar{o} f)$  est un terme de  $\delta (\bar{g} \bar{o} f)$ . En insérant les termes omis et en appliquant (9) on trouve

$$[f, g]^\vee = \delta g \bar{o} f - (-1)^n g \bar{o} \delta f + (-1)^n \delta (g \bar{o} f).$$

(Naturellement on a la même chose pour  $\bar{\wedge}$  et  $\bar{\mathcal{C}}$ .) Cette formule a quelques conséquences intéressantes. Elle nous indique tout d'abord que  $\delta$  n'est pas en général une dérivation par rapport à  $\bar{o}$ ; deuxièmement il s'en suit que le produit  $[,]^\vee$  induit dans la cohomologie de  $V$  à coefficients dans  $V$  vaut zéro (il n'en est pas ainsi quand les coefficients sont dans  $V'$ .)

Une troisième remarque est que la propriété de dérivation de  $\delta$  par rapport à  $[,]^\vee$  suit assez facilement de la dernière formule. Assez curieusement cependant, l'identité de Jacobi pour  $[,]^\vee$  ne semble pas suivre de formules générales telles que (9) et ses conséquences, mais dépend de quelques propriétés délicates de  $\bar{o}$  que nous n'avons pas encore formulées abstraitemennt. Nous reviendrons sur cela dans la section 13.

De façon à enlever la restriction  $V' = V$  des remarques précédentes, nous passons, comme dans la section 5, au produit semi-direct  $W = V \times V'$  dans lequel nous introduisons un produit  $\bar{\mu}$  donné par

$$\bar{\mu}((x, x'), (y, y')) = (\mu(x, y), \mu'(hx, y) + \mu'(x', hy) + \mu'(x, y')).$$

Il est du même type (associatif, de Lie, de Vinberg) que  $\mu$  et  $\mu'$ . La signification de  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  est celle de la section 5. Avec ces notations nous avons alors

$$([f, g]^\vee)^\perp = (-1)^{m-1} \{ (\bar{\mu} \bar{o} \bar{g}) \bar{o} f - \bar{\mu} \bar{o} (\bar{g} \bar{o} \bar{f}) \} = (-1)^{m-1} (\bar{\mu} \bar{o} g) \bar{o} f$$

le dernier terme du membre du milieu vaut zéro car  $\bar{g} \bar{o} \bar{f} = 0$ . (La même formule vaut à nouveau pour  $\bar{\wedge}$  et  $\bar{\mathcal{C}}$ ). Ainsi, dans tous les cas,  $[,]^\vee$  a été réduit à des produits de composition.

Dans l'algèbre de Lie graduée avec comme produit  $[,]^\vee$  les éléments de  $V'$  (applications linéaires d'ordre 0 de  $V$  dans  $V'$ ) forment une algèbre de Lie ordinaire.

On a

$$[x', y']^\vee = \mu'(x', y') - \mu'(y', x') \quad (\text{cas associatif})$$

$$[x', y']^\vee = \mu'(x', y') \quad (\text{cas de Lie}),$$

tandis que pour les algèbres de Vinberg le produit considéré dégénère en zéro. Leur produit avec une application  $f$  linéaire d'ordre  $n$  est donné par

$$[y', f]^\vee(x_1, \dots, x_n) = y' f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) y' \quad (\text{cas associatif})$$

$$[y', f]^\vee(x_1, \dots, x_n) = \mu'(y', f(x_1, \dots, x_n)) \quad (\text{cas de Lie})$$

Alors que les opérateurs cobords pour les fonctions linéaires d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $W$  resp.  $M$  sont liés naturellement comme nous l'avons justement vu, il n'y a pas de telle relation naturelle en ce qui concerne le cup-crochet  $[f, g]^\cup$ . Non seulement le cup-crochet n'est pas défini pour des fonctions à valeurs dans  $M$  mais si  $f$  et  $g$  prennent leurs valeurs dans  $M$  l'opérateur  $(f, g) \mapsto \pi^* o [\pi^* f, \pi^* g]^\cup$  dépend de façon essentielle du choix de l'espace  $U$ . Cependant, une modification de  $[,]^\cup$  marche au moins *partiellement* pour induire un produit: on définit ainsi une structure graduée d'algèbre de Lie pour la *cohomologie* de  $V$  à coefficients dans  $M$ .

La formule principale concernant le nouveau crochet est

$$[f, g] = [f, g]^\cup + (-1)^n g \circ \delta f + (-1)^{mn+m+1} f \bar{o} \delta g.$$

Cela a clairement un sens quand  $f$  et  $g$  sont des fonctions multilinéaires de  $W$  à valeurs dans  $W$ . On peut montrer (avec beaucoup d'efforts) que ce crochet définit une structure d'algèbre de Lie. Si  $f$  et  $g$  sont des applications multilinéaires de  $V$  à valeurs dans  $W$  la formule prend un sens seulement si les valeurs de  $\delta f$  et de  $\delta g$  sont à nouveau dans  $V$ ; i.e. exactement si  $\pi o f$  et  $\pi o g$  sont des cocycles.

Des calculs assez simples (utilisant  $\pi$  et la formule donnant  $[f, g]^\cup$ ) montrent que si  $\delta f$  et  $\delta g$  ont leurs valeurs dans  $V$ , alors  $\delta [f, g] = [\delta f, \delta g]^\circ$  a aussi ses valeurs dans  $V$ ; i.e.  $\pi o [f, g]$  est un cocycle. De façon analogue, on montre que la classe de cohomologie de  $\pi o [f, g]$  dépend seulement de  $\pi o f$  et de  $\pi o g$ . L'espace ne nous permet pas d'entrer dans les détails.

Il est facile de voir que la situation décrite dans cette section est une généralisation de celle de la section 5 où  $W$  était le produit semi-direct d'une algèbre  $V$  et d'un module: à la fois là et ici le quotient  $W/V$  est un  $V$ -module; dans le premier cas c'était le module dont on était parti. Par la construction actuelle, la cohomologie à coefficients dans un module (situation de la section 5) a un produit nul. De façon analogue, la situation ici est une généralisation de celle de la section 11; les produits gradués de Lie pour la cohomologie sont les mêmes dans les deux constructions (prendre  $V=V'$ ).

Nous indiquons brièvement la relation entre la cohomologie qu'on vient de discuter dans cette section et les déformations de sous-algèbres.

Supposons que  $V_1$  est un sous-espace de  $W$  qui est proche de  $V$ ; alors  $W$  est (comme espace vectoriel) la somme directe de  $V_1$  et de  $U$ . Soit  $w \in W$ , alors  $w = v + u$  (décomposition par rapport à  $V$  et  $U$ ) et aussi  $w = v_1 + u_1$  (décomposition par rapport à  $V_1$  et  $U$ ). L'application  $A: w \mapsto u_1 - u$  est linéaire et envoie  $W$  dans  $U$ . Pour  $w \in U$ , on a  $v = v_1 = 0$ , et  $u = u_1 = w$  de telle sorte que  $A$  vaut zéro sur  $U$ . Ainsi  $A$  est entièrement déterminé

tandis qu'à nouveau on trouve zéro dans le cas de Vinberg. Dans tous les cas, c'est l'action de  $y'$  sur les valeurs de  $f$  par des dérivations intérieures de  $V'$ ; i.e. par l'action infinitésimale du groupe des automorphismes intérieurs de  $V'$  sur les valeurs de  $f$ . Il est donc naturel que l'étude des déformations d'homomorphismes  $h : V \rightarrow V'$  prend sa forme la plus simple quand les équivalences de déformation de  $h$  sont données par le groupe d'automorphismes intérieurs de  $V'$ . Les résultats précis, que le manque de place ne nous permet pas de citer totalement, sont très semblables à ceux formulés dans la section 6. Les déformations infinitésimales modulo celles qui sont triviales sont données par  $H^1(V, V')$ ; l'espace d'obstruction est  $H^2(V, V')$ . En particulier,  $h$  est rigide quand  $H^1(V, V') = 0$ .

## 12. Sous-algèbres et encore un autre crochet.

Dans cette section nous discutons brièvement un autre crochet défini au moyen des seuls produits de composition et indiquons (sans aucune tentative vers la perfection) comment on peut l'appliquer aux déformations de sous-algèbres.

Nous considérons un espace vectoriel  $W$  muni d'un produit  $\mu$  d'un des trois types (associatif, de Lie, de Vinberg) considérés. Pour la simplicité, nous utiliserons seulement la notation  $\bar{o}$  pour représenter  $\bar{o}$ ,  $\wedge$  ou  $\mathcal{C}$ . Soit  $V$  un sous-espace de  $W$  qui en même temps est une sous-algèbre; i.e.  $\mu(V, V) \subset V$ . La restriction à  $V \times V$  de  $\mu$  est notée  $\mu'$ . Il est évident que  $W$  est un module sur  $V$ ; il suffit de poser  $\lambda(v, w) = \mu(v, w)$  et  $\rho(w, v) = \mu(w, v)$ . Quand  $W$  est ainsi considéré comme un  $V$ -module,  $V$  lui-même est un sous-module. Grâce à des principes généraux, l'espace quotient  $M = W/V$  est alors aussi un  $V$ -module. Si  $\pi : W \rightarrow M$  est la projection naturelle et  $U$  un espace de  $W$  complémentaire à  $V$ , alors la restriction de  $\pi$  à  $U$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'application inverse  $M \rightarrow U$  est notée  $\pi^*$ . La structure de  $V$ -module  $(\lambda', \rho')$  de  $M$  est ainsi donnée par

$$\lambda'(v, m) = \pi\mu(v, \pi^*m) = \pi\lambda(v, \pi^*m),$$

$$\rho'(m, v) = \pi\mu(\pi^*m, v) = \pi\rho(\pi^*m, v).$$

Soit  $f$  une application linéaire d'ordre  $n$  de  $V$  dans  $W$  (alternée dans le cas de Lie; alternée sauf en ce qui concerne la dernière variable dans le cas de Vinberg); alors  $\delta f$  est donné par les formules habituelles. On peut aussi calculer  $\delta(\pi \circ f)$ ; on utilise la structure de  $V$ -module de  $M$  puisque  $\pi \circ f$  prend ses valeurs dans  $M$ . On voit que les termes  $(\pi \circ f)$   $\bar{o}$   $\mu'$  et  $\pi \circ (f \bar{o} \mu')$  sont égaux tandis que  $\lambda'(v, \pi \circ f) = \pi\lambda(v, \pi^* \circ \pi \circ f) = \pi\lambda(v, f)$ ; et de

façon analogue pour  $\rho$ . Il s'en suit que  $\pi o \delta f = \delta (\pi o f)$ . En particulier  $\delta (\pi o f) = 0$  si et seulement si  $\delta f$  prend ses valeurs dans  $V$ .

par son action sur  $V$ . Au sous-espace  $V_1$  nous avons ainsi associé une application linéaire  $A : V \rightarrow U$ . On peut vérifier que les applications  $A$  paramètrent tous les espaces  $V_1$  complémentaires à  $U$ . Soit  $P$  la projection de  $W$  sur  $U$ ,  $Q$  la projection sur  $V$ ; de telle sorte que  $u = Pw$ ,  $v = Qw$ ;  $u_1 = (P+A)w$  et  $v_1 = (Q-A)w$ .

Le sous-espace  $V_1$  est une sous-algèbre si le produit de deux éléments quelconques  $(Q-A)x$  et  $(Q-A)y$  tombe à nouveau dans  $V_1$ ; i.e. donne zéro quand on applique  $P+A$ :

$$(P+A)\mu((Q-A)x, (Q-A)y) = 0.$$

On en tire:

$$\begin{aligned} & P\mu(Qx, Qy) + \{ A\mu(Qx, Qy) - P\mu(Ax, Qy) - P\mu(Qx, Ay) \} + \\ & + \{ -A\mu(Ax, Qy) - A\mu(Qx, Ay) + P\mu(Ax, Ay) \} + A\mu(Ax, Ay) = 0. \end{aligned}$$

Le premier terme vaut zéro puisque  $V$  est une sous-algèbre. Aux autres termes nous appliquons  $\pi$ : comme tous les termes ont leurs valeurs dans  $U$ , cela donne une condition équivalente. Nous posons  $\varphi = \pi o A$ . De plus, nous remplaçons  $Qx$ ,  $Qy$  par  $x$ ,  $y$  en comprenant bien que  $x, y \in V$ . Cela ne donne aucun affaiblissement de la condition puisque  $A$  et  $Q$  valent tous deux zéro sur  $U$ . Finalement, nous utilisons les applications  $\lambda'$  et  $\rho'$  quand elles sont applicables. On obtient alors

$$\begin{aligned} 0 &= \{ \varphi\mu'(x, y) - \rho'(\varphi x, y) - \lambda'(x, \varphi y) \} + \\ &+ \pi o \{ A \bar{o} \delta A + \frac{1}{2}[A, A]^\vee \} + \frac{1}{2}\varphi o Q o [A, A]^\vee = \\ &= -\delta\varphi + \frac{1}{2}\pi o [A, A] + \frac{1}{2}\varphi o Q o [A, A]^\vee = \\ &= -\delta\varphi + \frac{1}{2}\pi o [\pi^*\varphi, \pi^*\varphi] + \frac{1}{2}\varphi o Q o [\pi^*\varphi, \pi^*\varphi]^\vee \end{aligned}$$

Cette équation de déformation peut comme les précédentes être résolue. En posant  $\varphi = t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots$  on trouve immédiatement que  $\varphi_1 \in Z^1(V, M)$  et que l'on peut trouver  $\varphi_2$  seulement si  $\pi o [\pi^*\varphi_1, \pi^*\varphi_1]$  est un cobord; ce qu'on a dit ci-dessus implique que c'est toujours un cocycle. Ainsi, l'obstruction première est dans  $H^2(V, M)$ .

Deux déformations  $V_1$  et  $V_2$  de  $V$  sont dites équivalentes quand un automorphisme *intérieur* de  $W$  envoie l'une dans l'autre. On peut montrer que les déformations infinitésimales triviales de  $V$  sont en correspondance biunivoque avec les éléments de  $B^1(V, M)$ . Ainsi,  $H^1(V, M)$  l'espace quotient de  $Z^1(V, M)$  et de  $B^1(V, M)$  donne les « vraies » déformations infinitésimales de  $V$ . En particulier, lorsque  $H^1(V, M) = 0$ ,  $V$  est une sous-algèbre rigide.

Beaucoup de détails nécessaires à une discussion complète de la situation ont été sautés par manque de place. Cependant le modèle est clair: c'est la même chose que ce qui a été montré dans la section 6 avec beaucoup plus de détails. En outre, nous avons montré que la définition de l'opération de base  $[f, g]$  requiert seulement celle des produits de composition.

### 13. *Systèmes de composition.*

L'un des buts de cet article était d'exhiber un type de propriétés communes aux algèbres associatives, aux algèbres de Lie et aux algèbres de Vinberg. Le type le plus important, celui des algèbres commutatives et associatives peut aussi être inclus dans la théorie, mais comme nous l'avons déjà mentionné, de notre point de vue présent assez formel, les propriétés ne sont pas dans ce cas là vraiment très différentes de celles des algèbres associatives pour qu'il vaille la peine de les mentionner ici. La méthode pour exposer la similitude des propriétés consiste en ceci:

(i) établir pour chacun des trois types un système gradué d'applications multilinéaires munies d'un produit de composition vérifiant (9).

(ii) montrer comment un assez grand nombre de problèmes significatifs peut se réduire à l'étude d'un nombre d'opérations (applications cobords, produits de Lie gradués) qui peuvent être définies au moyen du seul produit de composition, sans égard au type d'algèbre d'où il provient.

Cependant, nous avons indiqué que certaines des *propriétés* des opérations *définies* à l'aide des produits de composition ne pouvaient pas être *prouvées* à partir de (9) seul. L'exemple mentionné dans la section 11 était l'identité de Jacobi pour le cup-crochet  $[,]^\cup$ . Un autre exemple, d'importance pour une étude ultérieure, est la propriété de dérivation des compositions à droite (i.e. des applications du type  $f \mapsto f \bar{o} h$ ) par rapport au cup-crochet.

Dans cette section, nous introduisons des opérateurs  $\gamma_p$  déduits du produit de composition. Nous montrons qu'une certaine supposition de « nilpotence » des  $\gamma$  — qui est satisfaite dans tous les cas connus — donne les propriétés mentionnées dans le paragraphe précédent sans difficulté. Les systèmes de composition sont des systèmes gradués avec un produit de composition pour lequel les opérateurs  $\gamma$  associés ont ces propriétés de nilpotence. Nous les mentionnerons tout à l'heure mais donnons d'abord quelques commentaires les motivant dans le cas de Lie.

Les applications multilinéaires que nous considérons sont toutes alternées, de  $V$  dans  $V$ . L'expression de  $f \bar{\wedge} g$  était (cf. (12))

$$\sum sg \sigma f(g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}), x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(m+n-1)}),$$

avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(m) \quad \text{et} \quad \sigma(m+1) < \dots < \sigma(m+n-1).$$

Notons cela  $(\gamma_1(g)f)(x_1, \dots, x_{n+m-1})$ ; considérons aussi  $g$  agissant sur  $f$ :

$$(13) \quad \gamma_1(g)f = f \bar{o} g.$$

De façon analogue, on peut prendre  $g_1, g_2$  linéaires respectivement d'ordre  $m_1$  et  $m_2$  et former  $\gamma_2(g_1, g_2)f$ :

$$(\gamma_2(g_1, g_2)f)(x_1, \dots, x_{n+m_1+m_2-2}) =$$

$$\sum sg \sigma f(g_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m_1)}), g_2(x_{\sigma(m_1+1)}, \dots, x_{\sigma(m_1+m_2)}), x_{\sigma(m_1+m_2+1)}, \dots, \\ x_{\sigma(m_1+m_2+n-2)}),$$

avec

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(m_1), \sigma(m_1+1) < \dots < \sigma(m_1+m_2)$$

et

$$\sigma(m_1+m_2-1) < \dots < \sigma(m_1+m_2+n-2).$$

L'opération  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3)f$  est analogue et définie par une somme dont les termes sont de la forme  $\pm f(g_1(\dots), g_2(\dots), g_3(\dots), \dots)$  dans lesquels les variables sont dûment permutées.

En continuant ainsi, on obtient une suite d'opérations  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

On peut exprimer les opérations  $\gamma_p$  au moyen des produits de composition; pour  $\gamma_1$  c'est vrai par définition. Pour voir qu'il en est de même pour  $\gamma_2$ , on observe que le côté gauche de (9) donne une expression du type de droite. Plus précisément, on a

$$\gamma_2(g_1, g_2)f = (-1)^{m_2-1} \{ \gamma_1(g_1)\gamma_1(g_2) - \gamma_1(\gamma_1(g_1)g_2) \} f.$$

La formule (9) dit, en effet, que au sens gradué  $\gamma_2$  est antisymétrique:

$$\gamma_2(g_1, g_2) = (-1)^{m_1 m_2 + 1} \gamma_2(g_2, g_1).$$

De façon analogue,  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3)$  est défini quand on connaît  $\gamma_2$ . Tout d'abord, observons que si  $\gamma_2(g_2, g_3)f$  est écrit de telle façon que  $g_2$  apparaît dans la seconde place de  $f$ , et  $g_3$  dans la troisième, on doit pour compenser multiplier par  $(-1)^{m_3-1+m_2-1}$ . Appliquer  $\gamma_1(g_1)$  place  $g_1$  dans la première place, faisant naître  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3)f$  puis place  $g_1$  dans la première place de  $g_2$  et après cela dans la première place de  $g_3$ , chaque fois avec des signes appropriés. On trouve

$$\begin{aligned} \gamma_3(g_1, g_2, g_3) &= (-1)^{m_2+m_3} \{ \gamma_1(g_1)\gamma_2(g_2, g_3) - \gamma_2(\gamma_1(g_1)g_2, g_3) - \\ &\quad - (-1)^{(m_1-1)m_2} \gamma_2(g_2, \gamma_1(g_1)g_3) \}. \end{aligned}$$

Plus généralement, on a, par récurrence

$$(14) \quad \gamma_{p+1}(g_0, \dots, g_p) = (-1)^{m_1 + \dots + m_p - p} \{ \gamma_1(g_0) \gamma_p(g_1, \dots, g_p) - \\ - \sum_{i=1}^n (-1)^{(m_0 - 1)(m_1 + \dots + m_{i-1})} \gamma_p(g_1, \dots, \gamma_1(g_0) g_i, \dots, g_p) \}$$

On peut montrer comme conséquence de (9) (la déduction est assez compliquée) que  $\gamma_p(g_1, \dots, g_p)$  est antisymétrique en  $g_1, \dots, g_p$ ; i.e. que si on interchange  $g_i$  et  $g_{i+1}$  on doit avoir comme facteur  $(-1)^{m_i m_{i+1} + 1}$ . Une preuve beaucoup plus simple peut s'obtenir en utilisant les propriétés alternées de  $f$  et de  $g$  (puisque, somme toute, nous sommes en train de discuter le cas de Lie), mais l'observation faite ici est qu'en vérité (9) seul suffit.

L'opérateur  $\gamma$  peut être défini dans le cas associatif et le cas de Vinberg par la même formule de récurrence commençant par le produit de composition. Dans le cas associatif,  $\gamma_p(g_1, \dots, g_p)f$  est une somme de termes dans chacun desquels les  $g_i$  occupent  $p$  places de  $f$ , de toutes les façons possibles, les signes étant appropriés. Les variables  $x_1, \dots, x_{m_1 + \dots + m_p + n-p}$  restent dans leur ordre naturel. Dans le cas de Vinberg deux sortes de mélanges interviennent mais les  $g_i$  occupent toujours dans chaque terme des places différentes de  $f$ .

Il est clair, dans chacun des cas ci-dessus, que si  $f$  est une fonction d'un nombre de variables plus petit que  $p$ ,  $\gamma_p$  ne peut plus se mettre sous la forme indiquée. D'ailleurs si on se réfère à la formule de récurrence, si  $\gamma_{p+1}(\dots)$  s'applique à une  $f$  linéaire d'ordre  $p$ , alors les termes à droite de l'expression s'annulent et  $\gamma_{p+1}(\dots)f = 0$ . Par récurrence  $\gamma_q(\dots)f = 0$  pour  $q > p$ . C'est la propriété de « nilpotence » de  $\gamma$  qui pour les calculs variés est nécessaire en plus de (9).

**DÉFINITION.** *Un système de composition* est une algèbre graduée munie d'un produit  $\bar{o}$  compatible avec la graduation réduite, vérifiant (9) et pour laquelle les opérateurs  $\gamma_p$  définis par (13, 14) vérifient  $\gamma_q(g_1, \dots, g_p)f = 0$  si le degré de  $f$  est  $< p$ .

La propriété de nilpotence est déjà intéressante pour les petites valeurs de  $p$ . Pour  $p = 1$ , elle dit que les produits de composition  $x \bar{o} f$  valent zéro quand  $x$  appartient à  $V$ ; pour  $p = 2$ , elle dit que pour  $f$  linéaire on a  $(f \bar{o} g_2) \bar{o} g_1 = f \bar{o} (g_2 \bar{o} g_1)$ ; ces deux propriétés furent déjà énoncées comme une partie du théorème de la section (4) dont (9) fait partie.

Le cas  $p = 3$  donne de nouvelles propriétés. Nous observons d'abord que  $\gamma_2(f, g)\mu = [f, g]^\vee$ . De plus, on a

$$0 = (-1)^{n+m} \gamma_3(h, f, g) \mu = \gamma_1(h) \gamma_2(f, g) \mu - \gamma_2(\gamma_1(h)f, g) \mu + \\ + (-1)^{(p-1)n} \gamma_2(f, \gamma_1(h)g) \mu,$$

c'est-à-dire

$$[f, g]^\circ \bar{o} h = [f \bar{o} h, g]^\circ + (-1)^{(p-1)n} [f, g \bar{o} h]^\circ.$$

C'est justement la propriété de dérivation de la composition à droite.

De façon à déduire l'identité de Jacobi pour le cup-crochet, nous avons besoin d'une formule pour  $\gamma_3(g_1, g_2, g_3) \gamma_1(f)$ . Nous avons déjà une formule pour  $\gamma_1(g_3) \gamma_1(f)$ , en permutant quelques termes dans la définition de  $\gamma_2$ :

$$\gamma_1(g_3) \gamma_1(f) = (-1)^{n-1} \gamma_2(g_3, f) + \gamma_1(\gamma_1(g_3)f).$$

Ensuite nous essayons de remplacer  $\gamma_1(g_3)$  par  $\gamma_2(g_2, g_3)$ . D'abord nous appliquons  $\gamma_1(g_2)$  à la formule ci-dessus

$$\begin{aligned} \gamma_1(g_2) \gamma_1(g_3) \gamma_1(f) &= (-1)^{n-1} \{ (-1)^{m_3+n} \gamma_3(g_2, g_3, f) + \gamma_2(\gamma_1(g_2)g_3, f) + \\ &+ (-1)^{(m_2-1)m_3} \gamma_2(g_3, \gamma_1(g_2)f) \} + \\ &+ (-1)^{m_3+n} \gamma_2(g_2, \gamma_1(g_3)f) + \gamma_1(\gamma_1(g_2) \gamma_1(g_3)f). \end{aligned}$$

Ensuite, nous remplaçons  $g_3$  par  $\gamma_1(g_2)g_3$  dans la même formule:

$$\gamma_1(\gamma_1(g_2)g_3) \gamma_1(f) = (-1)^{n-1} \gamma_2(\gamma_1(g_2)g_3, f) + \gamma_1(\gamma_1(\gamma_1(g_2)g_3)f),$$

et soustrayons les deux résultats. Après avoir supprimé un facteur  $(-1)^{m_3-1}$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma_2(g_2, g_3) \gamma_1(f) &= \gamma_3(g_2, g_3, f) + \gamma_1(\gamma_2(g_2, g_3)f) + \\ &+ (-1)^{m_2 m_3 + n} \gamma_2(g_3, \gamma_1(g_2)f) + (-1)^n \gamma_2(g_2, \gamma_1(g_3)f). \end{aligned}$$

Ensuite, on répète le procédé. La formule qu'on vient de dériver est utilisée trois fois; tout d'abord elle est multipliée sur la gauche par  $\gamma_1(g_1)$ ; ensuite  $g_2$  est remplacé par  $-\gamma_1(g_1)g_2$ ; enfin  $g_3$  est remplacé par  $-(-1)^{(m_1-1)m_2} \gamma_1(g_1)g_3$ ; alors on ajoute les trois résultats. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} (-1)^{m_2+m_3} \gamma_3(g_1, g_2, g_3) \gamma_1(f) &= (-1)^{m_2+m_3+n+1} \gamma_4(g_1, g_2, g_3) + \\ &+ (-1)^{(m_1-1)(m_2+m_3)} \gamma_3(g_2, g_3, \gamma_1(g_1)f) + \\ &+ (-1)^{(m_2-1)(m_3-1)} \gamma_3(g_1, g_3, \gamma_1(g_2)f) + \\ &+ (-1)^{m_2+m_3} \gamma_3(g_1, g_2, \gamma_1(g_3)f) + \\ &+ (-1)^{m_2+m_3+n+1} \gamma_2(g_1, \gamma_2(g_2, g_3)f) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{m_1 m_2 + m_2 + m_3 + 1} \gamma_2(g_2, \gamma_2(g_1, g_3)f) + \\
 & + (-1)^{(m_1 + m_2)m_3 + m_2 + m_3 + n + 1} \gamma_2(g_3, \gamma_2(g_1, g_2)f) + \\
 & + (-1)^{m_2 + m_3} \gamma_1(\gamma_3(g_1, g_2, g_3)f).
 \end{aligned}$$

On observe un terme unique en premier,  $\gamma_4$ , et en dernier,  $\gamma_1(\gamma_3)$ . Les termes du milieu forment deux groupes,  $\gamma_3(\gamma_1)$  et  $\gamma_2(\gamma_2)$ , et comprennent  $g_1, g_2, g_3$  dûment permuts. On applique la formule à  $\mu$ , en prenant  $f = \mu$ . Alors le côté gauche vaut zéro, puisque  $\gamma_1(\mu)\mu = \mu\bar{o}\mu = 0$ . Le terme  $\gamma_4$  donne zéro grâce à la propriété qu'on vient de trouver; la même chose vaut pour le terme  $\gamma_3(\gamma_1)$ . Le dernier terme donne zéro puisque  $\gamma_3(\dots)f = \gamma_3(\dots)\mu = 0$ . Il reste les trois derniers termes du milieu; on les multiplie par  $(-1)^{m_2 + m_3 + n + m_1 m_3 + 1}$  et on obtient

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{m_1 m_3} [g_1, [g_2, g_3]]^\cup + (-1)^{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 1} [g_2, [g_1, g_3]]^\cup + \\
 & + (-1)^{m_2 m_3} [g_3, [g_1, g_2]]^\cup = 0,
 \end{aligned}$$

c'est justement l'identité de Jacobi.

Ce qui précède est juste un échantillon des applications de la propriété de nilpotence. L'utilité de  $\gamma$  est également claire si on observe que, avec la notation de la section 6, pour  $f$  linéaire d'ordre  $n$ , on a

$$\sigma(\alpha)f = \frac{1}{n!} \alpha^{-1} \bar{o} \{\gamma_n(\alpha, \dots, \alpha)f\}.$$

Par cette formule, on peut définir et manipuler l'action de groupe des éléments inversibles de degré 1.

Tout type d'algèbre pour lequel on peut trouver un système de composition, partage les propriétés que nous avons déduites au moyen des systèmes de composition. Il est maintenant clair que ces propriétés couvrent un large domaine.

#### RÉFÉRENCES

- [1] BOURBAKI, N., Groupes et algèbres de Lie, chap. I: *Algèbres de Lie*. Hermann, Paris 1960.
- [2] JACOBSON, N., Lie algebras. *Interscience Publishers*, 1962.
- [3] VINBERG, E. B., Theory of convex homogeneous cones. *Trudy Moscow Mat. Obshch.* 12 (1963) 303-358 = Transl. *Moscow Math. Soc.* 12 (1963) 340-403.
- [4] GERSTENHABER, M., The Cohomology structure of an associative ring. *Ann. of Math.* 78 (1963) 267-288.
- [5] GERSTENHABER, M., On the deformations of rings and algebras. *Ann. of Math.* 79 (1964) 59-104.

- [6] HOCHSCHILD, G., On the cohomology groups of an associative algebra. *Ann. of Math.* 46 (1945) 58-67.
- [7] NIJENHUIS, A. et R. W. RICHARDSON, Cohomology and deformations in graded Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* 72 (1966) 1-29.
- [8] FRÖLICHER, A. et A. NIJENHUIS, Theory of vector-valued differential forms I. *Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. A59 = Indag. Math.* 18 (1956) 338-359.
- [9] HARRISON, D., Commutative algebras and cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.* 104 (1962) 191-204.
- [10] HERMANN, R., Analytic continuation of group representations I-VI. *Commun. Math. Phys.*, I: 2 (1966) 251-270; II: 3 (1966) 53-74; III: 3 (1966) 75-97; IV: 5 (1967) 131-156; V: 5 (1967) 157-190; VI: 6 (1967) 205-225.
- [11] LEVY-HAHAS, M., Deformation and contraction of Lie algebras. *J. Math. Phys.* 8 (1967) 1211-1222.
- [12] NIJENHUIS, A. et R. W. RICHARDSON, Deformation of Lie algebra structures. *J. Math. Mech.* 17 (1967) 89-106.
- [13] — et R. W. RICHARDSON, Deformations of homomorphisms of Lie groups and Lie algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 175-179.
- [14] — A Lie product for the cohomology of subalgebras with coefficients in the quotient. *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967) 962-967.
- [15] — The graded Lie algebras of an algebra. *Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. A70 = Indag. Math.* 29 (1967) 475-486.
- [16] — Composition systems and deformations of subalgebras. *Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. A71 = Indag. Math.* 30 (1968) 119-136.
- [17] — et R. W. RICHARDSON, Commutative algebra cohomology and deformations of Lie and associative algebras. *J. of Algebra* (à paraître).
- [18] PAGE, S. et R. W. RICHARDSON, Stable subalgebras of Lie algebras and associative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 127 (1967) 302-312.
- [19] RICHARDSON, R. W., On the rigidity of semi-direct products of Lie algebras. *Pac. J. Math.* 22 (1967) 339-344.
- [20] — A rigidity theorem for subalgebras of Lie and associative algebras. III. *J. Math.* 11 (1967) 92-110.
- [21] — Deformations of subalgebras of Lie algebras (à paraître).

### *Notes bibliographiques concernant la partie I*

Les notions de groupe, d'algèbre associative, d'idéal, d'espace quotient peuvent se trouver dans presque n'importe quel texte d'algèbre moderne. En ce qui concerne les algèbres de Lie on peut citer les références suivantes: Bourbaki [1] et Jacobson [2]. En ce qui concerne les algèbres de Vinberg, voir Vinberg [3]. Les modules sur les algèbres associatives et les algèbres de Lie sont bien connus; ceux sur les algèbres de Vinberg semblent être inconnus quoique non nouveaux. Le théorème de la section 3, le second à partir de la fin, est la variation d'un théorème bien connu concernant les modules sur les algèbres associatives. Avec les mêmes notations la structure de module sur  $M'$  est donnée par

$$\lambda'(x, \alpha)y = \lambda(x, \alpha y), \quad \rho'(\alpha, x)y = -\rho(\alpha x, y) + \alpha\mu(x, y).$$

### *Notes bibliographiques de la partie II*

Les références principales en ce qui concerne les produits de composition des algèbres associatives sont Gerstenhaber [4, 5]. Dans ces papiers là, les systèmes vérifiant (9) sont appelés anneaux de pré-Lie. La cohomologie des algèbres associatives est due à Hochschild [6] qui n'utilise ni les produits de composition ni leurs commutateurs. La relation entre la cohomologie et les extensions est due à Hochschild. La théorie de la déformation des algèbres associatives est due à Gerstenhaber. On peut trouver en détail la méthode utilisant le théorème des fonctions implicites pour résoudre les équations de déformation dans Nijenhuis — Richardson [7]; Kuranishi l'a utilisée dans son travail sur les déformations des structures analytiques complexes. De même que la théorie de la déformation sous la forme présente a trouvé son commencement dans le contexte des structures analytiques complexes, c'est pour ces structures qu'a été prouvé le premier théorème de rigidité (dû à Frölich et Nijenhuis). Des résultats plus formels sur les déformations et les obstructions étaient déjà présents dans le texte miméographié d'une conférence de l'auteur donnée en 1956 à Seattle USA lors de l'Institut d'été sur la Géométrie différentielle.

### *Notes bibliographiques de la partie III*

Le produit de composition (« hook ») des algèbres de Lie fut tout d'abord introduit par Frölicher et Nijenhuis [8] dans le contexte de la géométrie différentielle; dans le même papier on introduit une structure de Lie graduée (construite sur l'algèbre de Lie des corps vectoriels), structure qu'on a trouvée à nouveau dans la section 12 dans un contexte semble-t-il totalement différent. Les sources en ce qui concerne les déformations des algèbres de Lie comprennent un article de Levy-Nahas [11] qui étend les idées de Gerstenhaber aux algèbres de Lie et donne une discussion très détaillée des déformations des algèbres de Lie à trois dimensions. Il discute aussi les contractions — un type inverse de déformation. Un autre article sur les déformations d'algèbres de Lie par Nijenhuis et Richardson [12] procède suivant les lignes données ici mais donne plus de détails. Le produit de composition pour les algèbres de Vinberg est dû à Matsushima (non publié); le

même vaut sur le reste de la section 10. Les algèbres commutatives et associatives sont étudiées au moyen d'un système de composition qui est un sous-système de celui qui vaut pour les algèbres associatives. Les applications bilinéaires par exemple sont symétriques; les applications de degré plus grand doivent vérifier d'autres conditions. La source première est Harrison [9]; des détails sur le système de composition peuvent aussi être trouvés dans Nijenhuis-Richardson [17] et dans Nijenhuis [15].

Le cup-produit et le cup-crochet sont pour les algèbres associatives dus à Gerstenhaber (voir la partie II); le seul dans le cas de Lie est une extension directe et peut se trouver dans un article de Nijenhuis et Richardson [13] qui discute les déformations d'homomorphismes. Une série d'articles d'Hermann [10] accentue les applications physiques plus que les considérations théoriques. Le cup-produit et le cup-crochet des algèbres de Vinberg sont dans le contexte juste des déassements naturels. Les aspects formels de la section 12 en ce qui concerne le crochet pour les algèbres ont été élaborés dans Nijenhuis [14] qui donne des relations simples entre  $H^*(V, V)$ ,  $H(V, W)$  et  $H^*(V, M)$ , les différents crochets, les déformations et les obstructions. La rigidité des sous-algèbres est discutée dans Richardson [20]; la stabilité des sous-algèbres (non discutée ici) dans Page-Richardson [18], les déformations de sous-algèbres dans Nijenhuis [16] et dans Richardson [21]. Les systèmes généraux de composition sont discutés dans Nijenhuis [16] mais la condition de nilpotence a été négligée; l'addition de cette condition rend redondant certains des autres axiomes de cet article.

Tous les théorèmes de rigidité donnent comme condition suffisante l'évanouissement de certains groupes de cohomologie. Un exemple montrant que pour la rigidité des algèbres de Lie la condition n'est pas nécessaire est dû à Richardson [19]. Le travail d'Harrison [9] fournit des conditions de rigidité plus fines; cf. Nijenhuis et Richardson [17].

L'énumération qui figure ici est nécessairement incomplète. Non seulement il y a les nombreux articles sur les déformations dus aux auteurs déjà mentionnés; il y a aussi les résultats sur la structure plus fines des algèbres déformées (par ex. par Flanigan) et les résultats sur la déformation des structures analytiques complexes (par ex. par Griffiths) qu'on peut étendre aux algèbres. La relation entre les pseudogroupes et les algèbres a été explorée par ex. par Rim et Sternberg.

(Manuscrit reçu le 15 novembre 1968)

Albert Nijenhuis  
Dept. of Mathematics  
University of Pennsylvania  
Philadelphia 19104