Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA «MÉTHODE DE L'HYPERBOLE» DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Autor: Saffari, Bahman

Anhang: Appendice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42352

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

du théorème 8, la différence $v_r(x) - d_r x$ étant ainsi équivalente au produit d'une constante par $x^{\frac{1}{r+1}} (\log x)^{-2}$, où r est le plus grand entier α tel que $f(p^\alpha) = 0$.

b) La démonstration du développement asymptotique mentionné ci-dessus, et a fortiori ceux des théorèmes 5 et 8 (et, pareillement, ceux des théorèmes 1 et 4), peut se faire en n'utilisant le théorème des nombres premiers que sous sa forme asymptotique, c'est-à-dire:

$$\pi(x) = \sum_{r=1}^{k} (r-1)! \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{k+1}}\right].$$

IV. Méthode analytique

La méthode de l'hyperbole, parce qu'elle est élémentaire, a une efficacité limitée (la rédaction complète de la démonstration du théorème 8, faisable pour $m = 2$, devient horrible pour $m \geqq 3$).

H. Delange, par des méthodes analytiques, retrouve tous les résultats contenus dans cet article de façon plus rapide et plus générale, et va beaucoup plus loin. Trois articles à ce sujet [8], [9] et [10] sont à paraître en 1970 dans *Acta Arithmetica.*

Appendice

Nous montrons ici comment on peut retrouver, de façon élémentaire, le résultat de Renyi (et même un peu mieux) et le théorème A de Delange.

Théorème. *Notons toujours par $v_m(x)$ le nombre des $n \leqq x$ tels que $\Omega(n) - \omega(n) = m$. Alors :*

a) *Sans utiliser aucune estimation de $\pi(x)$ [autre que l'estimation banale $\pi(x) = O(x)$], nous avons :*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) *L'estimation de Tchebicheff $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ implique :*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log\log x)^m)$$

c) *Le théorème des nombres premiers* $\left[\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}\right]$ *implique :*

$$v_m(x) = d_m x + o\left(\sqrt{x}(\log\log x)^{m-1}\right).$$

Démonstration :

a) Reprenons les expressions $V_r(x)$, $V_{r_1,r_2}(x)$, $V_{r_1,r_2,r_3}(x)$, ... définies précédemment. Compte tenu de la relation $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x})$ [dont la démonstration ne fait appel à aucune estimation de $\pi(x)$], nous avons:

$$V_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x) = \frac{6}{\pi^2} x \sum_p p^{-(r_1+r_2+\ldots+r_k)} + O\left(x \sum_{l>\sqrt{x}} l^{-2}\right) + O\left(\sqrt{x} \sum_{l\leqq\sqrt{x}} \frac{1}{l}\right)$$

$= \text{constante } x + O(\sqrt{x}\log x).$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues [rencontrés au cours de la démonstration du théorème 8], on obtient par addition

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x}\log x).$$

b) L'estimation de Tchebicheff $\pi(x) = O\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$ implique:

$$\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant x\\ \omega(l)\leqslant k}} 1 = O\left(\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{k-1}\right)$$

Nous obtenons donc cette fois:

$$V_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x) = \text{constante } x + O\left[x \sum_{\substack{l>\sqrt{x}\\ \omega(l)\leqq k}} l^{-2}\right[+ O\left[\sqrt{x} \sum_{\substack{l\leqq\sqrt{x}\\ \omega(l)\leqq k}} \frac{1}{l}\right] =$$

$$= \text{constante } x + O\left[\sqrt{x}(\log\log x)^k\right]$$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues, on obtient donc:

$$v_m(x) = d_m x + O\left(\sqrt{x}(\log\log x)^m\right).$$

c) Le théorème des nombres premiers $\left[\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}\right]$ implique:

$$\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant x\\ \omega(l)\leqslant k}} 1 \sim \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant x\\ \Omega(l)=k}} 1 \sim \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{k-1}.$$

La relation $v_m(x) = d_m x + o\left(\sqrt{x}(\log\log x)^m\right.$ (s'obtient alors de façon analogue à b), en remarquant que cette fois: $Q(x) = \frac{6x}{\pi^2} + o(\sqrt{x})$.