Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 14 (1968)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA «MÉTHODE DE L'HYPERBOLE» DE DIRICHLET A LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

Autor: Saffari, Bahman

Anhang: Appendice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-42352

du théorème 8, la différence $v_r(x) - d_r x$ étant ainsi équivalente au produit d'une constante par $x^{\frac{1}{r+1}} (\log x)^{-2}$, où r est le plus grand entier α tel que $f(p^\alpha) = 0$.

b) La démonstration du développement asymptotique mentionné ci-dessus, et a fortiori ceux des théorèmes 5 et 8 (et, pareillement, ceux des théorèmes 1 et 4), peut se faire en n'utilisant le théorème des nombres premiers que sous sa forme asymptotique, c'est-à-dire:

$$\pi(x) = \sum_{r=1}^{k} (r-1)! \frac{x}{(\log x)^r} + O\left[\frac{x}{(\log x)^{k+1}}\right].$$

IV. Méthode analytique

La méthode de l'hyperbole, parce qu'elle est élémentaire, a une efficacité limitée (la rédaction complète de la démonstration du théorème 8, faisable pour $m = 2$, devient horrible pour $m \geqq 3$).

H. Delange, par des méthodes analytiques, retrouve tous les résultats contenus dans cet article de façon plus rapide et plus générale, et va beaucoup plus loin. Trois articles à ce sujet [8], [9] et [10] sont à paraître en 1970 dans *Acta Arithmetica.*

Appendice

Nous montrons ici comment on peut retrouver, de façon élémentaire, le résultat de Renyi (et même un peu mieux) et le théorème A de Delange.

Théorème. *Notons toujours par* $v_m(x)$ *le nombre des* $n \leqq x$ *tels que* $\Omega(n) - \omega(n) = m$. *Alors :*

a) *Sans utiliser aucune estimation de* $\pi(x)$ [*autre que l'estimation banale* $\pi(x) = O(x)$], *nous avons :*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} \log x).$$

b) *L'estimation de Tchebicheff* $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ *implique :*

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x} (\log \log x)^m)$$

c) *Le théorème des nombres premiers* $\left[\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}\right]$ *implique :*

$$v_m(x) = d_m x + o\left(\sqrt{x}(\log\log x)^{m-1}\right).$$

Démonstration :

a) Reprenons les expressions $V_r(x)$, $V_{r_1,r_2}(x)$, $V_{r_1,r_2,r_3}(x)$, ... définies précédemment. Compte tenu de la relation $Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x})$ [dont la démonstration ne fait appel à aucune estimation de $\pi(x)$], nous avons:

$$V_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x) = \frac{6}{\pi^2} x \sum_p p^{-(r_1+r_2+\ldots+r_k)} + O\left(x \sum_{l > \sqrt{x}} l^{-2}\right) + O\left(\sqrt{x} \sum_{l \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{l}\right)$$

$= \text{constante } x + O(\sqrt{x} \log x)$.

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues [rencontrés au cours de la démonstration du théorème 8], on obtient par addition

$$v_m(x) = d_m x + O(\sqrt{x}\log x).$$

b) L'estimation de Tchebicheff $\pi(x) = O\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$ implique:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant x \\ \omega(l) \leqslant k}} 1 = O\left(\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{k-1}\right)$$

Nous obtenons donc cette fois:

$$V_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x) = \text{constante } x + O[x \sum_{\substack{l > \sqrt{x} \\ \omega(l) \leqq k}} l^{-2}[+ O[\sqrt{x} \sum_{\substack{l \leqq \sqrt{x} \\ \omega(l) \leqq k}} \tfrac{1}{l}] =$$

$$= \text{constante } x + O\left[\sqrt{x}(\log\log x)^k\right]$$

En utilisant alors la relation (10) et ses analogues, on obtient donc:

$$v_m(x) = d_m x + O\left(\sqrt{x}(\log\log x)^m\right).$$

c) Le théorème des nombres premiers $\left[\pi(x) \sim \dfrac{x}{log\ x}\right]$ implique:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant x \\ \omega(l) \leqslant k}} 1 \sim \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant x \\ \Omega(l) = k}} 1 \sim \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{\log x} (\log\log x)^{k-1}.$$

La relation $v_m(x) = d_m x + o\left(\sqrt{x}(\log\log x)^m\right.$ (s'obtient alors de façon analogue à b), en remarquant que cette fois: $Q(x) = \frac{6x}{\pi^2} + o(\sqrt{x})$.