

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'ORGANISATION D'UN COURS D'ARITHMÉTIQUE  
**Autor:** Samuel, Pierre  
**Kapitel:** V. Autres ordres. Mérites respectifs de ces ordres  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41545>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## V. AUTRES ORDRES. MÉRITES RESPECTIFS DE CES ORDRES

La théorie des permutations nous dit qu'il y a  $3! = 6$  ordres possibles des 3 blocs (a), (b), (c). Nous en avons déjà examiné 3. Il me paraît pédagogiquement peu indiqué de séparer les blocs (b) (nombres premiers) et (c) (divisibilité); ceci exclut donc les ordres (b), (a), (c) et (c), (a), (b). Reste l'ordre (a), (c), (b): il consiste à démarrer sur la partie élémentaire des congruences (c.à.d. la définition de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et de sa structure d'anneau), puis à suivre l'ordre indiqué dans les 1) et 2) du § IV; à la fin de ce 2) on peut donner l'énoncé complet concernant l'identité de Bezout (y compris la caractérisation des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ ); quant à l'énoncé relatif à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  pour  $p$  premier, il vient à la fin du 3). Ainsi l'ordre (a), (c), (b) ressemble assez à l'ordre (c), (b), (a) du § IV; mais il a le désavantage que des considérations sur les congruences viennent interrompre des propriétés uniquement multiplicatives.

Restent ainsi à comparer les ordres (a), (b), (c) décrit dans le § II, (b), (c), (a) du § III, et (c), (b), (a) du § IV. Le premier a l'avantage de l'économie; aucune démonstration n'y est difficile; la connaissance préalable de l'unique décomposition en facteurs premiers permet de donner un exposé à la fois très simple et complet de la théorie du pgcd et du ppcm (on obtient à la fois l'existence du pgcd ou du ppcm, et le moyen de les calculer à partir de décompositions en facteurs premiers). Le désavantage de cet ordre est que le théorème «  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps lorsque  $p$  est premier » y reçoit une démonstration ad hoc, particulière à  $\mathbb{Z}$ ; il n'est donc pas généralisable à d'autres anneaux principaux.

L'ordre (b), (c), (a) du § III a encore l'avantage dû au fait que l'unique décomposition en facteurs premiers vient avant la théorie du pgcd et du ppcm. Mais il a le désavantage que la démonstration d'unicité de E. Zermelo est un peu trop ingénieuse, et risque de passer par-dessus la tête de la plupart des élèves. Comme l'ordre du § II, il a aussi le désavantage de ne pas se prêter à la généralisation aux autres anneaux principaux.

Enfin l'ordre (c), (b), (a) du § IV a le grand avantage d'introduire l'importante notion d'idéal, et de se prêter à la généralisation aux anneaux principaux; on peut, en compléments ou en exercices, étudier la divisibilité dans d'autres anneaux principaux, par exemple l'anneau des polynômes à une variable sur un corps, l'anneau des nombres  $a + b\sqrt{2}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ), ou l'anneau des « entiers de Gauss »  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1$ ); ce dernier

est particulièrement intéressant, car il permet d'étudier très élégamment la représentation des entiers comme sommes de deux carrés. Un professeur soucieux de pureté pourra même utiliser la variante esquissée dans le § IV : du fait que  $Z$  est un anneau principal, il ne retiendra d'abord que l'énoncé « l'intersection  $aZ \cap bZ$  de deux idéaux principaux est un idéal principal  $mZ$  » ; il aura ainsi le ppcm, en déduira le pgcd, puis l'unique décomposition en facteurs premiers ; cette variante a l'avantage d'être immédiatement généralisable, non seulement aux anneaux principaux, mais à tous les anneaux factoriels ; en effet, jointe à l'existence d'une décomposition en facteurs « irréductibles », la principalité des intersections de deux idéaux principaux caractérise les anneaux factoriels. Mais les désavantages de cet ordre sont qu'il est nettement moins économique que celui du § II, que certaines démonstrations dans la théorie (c) du pgcd et du ppcm y sont un peu subtiles (encore plus subtiles si on utilise la variante ci-dessus), que l'existence du pgcd et du ppcm y est séparée de leur calcul à partir de décompositions en facteurs premiers, et qu'enfin la finitude des anneaux  $Z/nZ$  n'y est pas utilisée (ce qui prive les élèves d'occasions de mieux comprendre les propriétés des ensembles finis).

Que peut-on maintenant conclure de cette discussion ? L'ordre du § III, avec la démonstration de E. Zermelo, paraît un peu inférieur aux deux autres. Quant à ceux-ci, la simplicité du premier me paraît équilibrer la généralité du dernier ; le choix entre eux dépendra donc des préférences du professeur, de son tempérament, du niveau et de l'état d'esprit de ses élèves.

P. SAMUEL

Ecole normale supérieure de jeunes filles  
Boulevard Jourdan, 48 (Paris, 14<sup>e</sup>)

(Reçu le 21 avril 1967)

**Vide-leer-empty**