

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'ORGANISATION D'UN COURS D'ARITHMÉTIQUE  
**Autor:** Samuel, Pierre  
**Kapitel:** IV. L'ORDRE CLASSIQUE (c), (b), (a)  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41545>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2) L'étude purement multiplicative des diviseurs et multiples peut alors procéder comme dans le 3) du § II. Pour l'identité de Bezout, il semble préférable d'avoir la théorie des congruences.

3) Jusqu'au théorème disant que  $Z/pZ$  est un corps lorsque  $p$  est premier (exclus), on procède comme dans le 1) du § II. Mais il n'est pas avantageux de démontrer directement ce théorème; en effet on en sait suffisamment pour démontrer un théorème plus fort, à savoir le dernier théorème du § II relatif à l'identité de Bezout. Alors l'énoncé relatif à  $Z/pZ$  ( $p$  premier) vient en corollaire; en effet un élément non nul de  $Z/pZ$  est la classe d'un entier premier à  $p$ , et est donc inversible dans  $Z/pZ$  d'après l'assertion  $b)$  du théorème.

#### IV. L'ORDRE CLASSIQUE (c), (b), (a)

1) L'exemple de l'ensemble  $nZ$  des multiples de  $n$  introduit la notion d'*idéal* de  $Z$  (et, plus généralement, d'un anneau commutatif quelconque). La division euclidienne permet alors de montrer le:

**THÉORÈME.** *Tout idéal  $I$  de  $Z$  est « principal », c'est-à-dire de la forme  $nZ$ .*

C'est clair si  $I$  est réduit à 0. Sinon  $I$  contient des éléments  $> 0$ , donc un plus petit élément  $> 0$ , soit  $n$ . Par division euclidienne de  $x \in I$  par  $n$ , soit  $x = nq + r$  avec  $0 \leq r \leq n - 1$ , on voit que  $r \in I$ , donc  $r = 0$ ; ainsi  $x \in nZ$ , et  $I = nZ$ . C.Q.F.D.

L'existence du *ppcm* de deux entiers  $a$  et  $b$  est alors immédiate: en effet  $Za \cap Zb$  est un idéal de  $Z$ , donc est de la forme  $Zm$ . Pour le *pgcd* on peut le déduire du *ppcm*, en vérifiant que l'entier  $d = ab/\text{ppcm}(a, b)$ , d'une part divise  $a$  et  $b$ , d'autre part est multiple de tout diviseur commun à  $a$  et  $b$ . Mais il est plus fructueux et plus classique de noter que tout diviseur commun à  $a$  et  $b$  divise tous les éléments de l'idéal  $Za + Zb$  (ensemble des sommes  $ua + vb$ , où  $u$  et  $v$  parcourent  $Z$ ); or cet idéal est de la forme  $Zd$ ; comme  $Za \subset Zd$ , on voit que  $d$  divise  $a$ , et de même  $d$  divise  $b$ . Ainsi  $d$  a les propriétés classiques du *pgcd*; de plus il s'écrit

$$d = ua + vb \quad (u, v \in Z) \quad (3)$$

N. B. Il sera bon de dire que les mots « plus grand » et « plus petit » (dans « plus grand commun diviseur » et « plus petit commun multiple ») ne se rapportent qu'incidemment à la relation d'ordre usuelle de  $N$ ,

mais se rapportent de façon essentielle à la relation d'ordre de la *divisibilité* sur  $N$ . D'ailleurs la théorie décrite ici s'applique à n'importe quel anneau principal  $A$ , et un tel anneau n'admet en général pas d'ordre analogue à l'ordre usuel de  $\mathbb{Z}$ .

On démontre alors, à la manière classique, les formules du type  $\text{pgc}(ab, ac) = a \text{ pgcd}(b, c)$ , le lemme d'Euclide, et les propriétés des entiers premiers entre eux. Un professeur soucieux de pureté s'efforcera de ne pas utiliser l'identité de Bezout dans des questions uniquement multiplicatives (comme le lemme d'Euclide), car il s'agit là de propriétés valables dans tout anneau factoriel, et pas seulement dans tout anneau principal.

On termine la partie (c) par l'*identité de Bezout*, qui affirme ici l'équivalence de :

a)  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux; c) il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $au + bv = 1$ .

La démonstration résulte aussitôt de la formule (3).

2) On passe à l'étude des nombres *premiers*. Pour l'existence de la décomposition en facteurs premiers, on procède comme dans le 2) du § II. Pour l'unicité on démontre le lemme « si  $p$  est premier et s'il divise  $ab$ , alors il divise  $a$  ou  $b$  », qui est une conséquence facile du lemme d'Euclide; l'unicité en résulte de façon classique. On introduit la notation (cf. 2) du § II):

$$x = \prod_{p \in P} p^{v_p(x)}$$

où  $P$  désigne l'ensemble des nombres premiers, et où les exposants  $v_p(x)$  sont nuls à l'exception d'un nombre fini. Comme dans le 3) du § II, on donne la formule  $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ , la condition de divisibilité «  $v_p(x) \leq v_p(y)$  pour tout  $p \in P$  », et les formules  $v_p(\text{pgcd}(x, y)) = \inf(v_p(x), v_p(y))$  et  $v_p(\text{ppcm}(x, y)) = \sup(v_p(x), v_p(y))$ .

3) Pour la théorie des congruences on procède comme dans le 1) du § II jusqu'au théorème disant que  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps lorsque  $p$  est premier (exclus). Comme dans le 3) du § III, on passe au théorème sur l'identité de Bezout (dernier théorème du § II); ici la démonstration est quasiment faite car, dans le 1), on a démontré l'équivalence des assertions a) et c); reste l'assertion b) (« la classe  $\bar{b}$  de  $b$  est inversible dans  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  »), mais ce n'est qu'une traduction de b). On donne en corollaire l'énoncé relatif à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  pour  $p$  premier (cf. le 3) du § III).