On démontre que, sur un A.N.R. compact, toutes les théories de l'homologie satisfaisant l'axiome de dimension coïncident.

(Borsuk, chap. 5.)

Problème : Est-ce qu'un A.N.R. compact X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe fini ?

Remarques: D'après ce qui précède, X a donc le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable, dominé par un C.W. complexe fini.

Or Wall a construit un exemple d'un C.W. complexe dénombrable dominé par un C.W. complexe fini, qui n'a pas le type d'homotopie d'un complexe fini. (Cf. Wall.)

Mais l'exemple de Wall n'implique pas que la réponse au problème précédent soit négative.

Si X est simplement connexe, il n'est pas difficile de voir que la réponse au problème est affirmative.

§ 5. Quelques exemples intéressants

A) On a le théorème suivant, dû à J. H. C. Whitehead.

Théorème: Soient X_1 et X_2 deux A.N.R. compacts (disjoints). Soit $X_0 \subset X_1$ un fermé qui soit aussi un A.N.R. Alors, si f_i: $X_0 \to X_2$ est une application continue, l'espace $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est un A.N.R. (compact).

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 5, § 9. Si X_0, X_1, X_2 sont des A.R. compacts, alors $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est aussi un A.R. compact.

Ce théorème permet de construire des A.N.R. ou des A.R. qui ont une allure assez pathologique.

Par exemple : Soient

X_1 = un disque D^q fermé, $q \geqslant 2$;

X_0 = un segment fermé contenu dans l'intérieur de X_1;

X_2 = un disque D^n fermé, $n \geqslant q+1$;

f: $X_0 \to X_2$ une application continue surjective.

Alors l'espace $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est un A.R. compact. Il n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial, ou à un C.W. complexe.

Plus généralement, partant d'un complexe simplicial fini, on peut s'amuser à faire cette construction un nombre fini de fois dans chaque simplexe, obtenant ainsi un A.N.R. compact qui n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial.

Un tel exemple de « singularités » dans un A.N.R. s'appelle singularité de Péano, pour d'évidentes raisons.

(Voir Borsuk, chap. 6, § 1.)

B) En ce qui concerne les A.N.R. compacts de dimension finie, on a le théorème suivant:

Théorème: Soit X un espace métrique compact, localement contractible, de dimension finie. Alors X est un A.N.R. Pour une démonstration, voir Borsuk, chap. 5, § 10.

Un exemple célèbre dû à Borsuk montre que la condition de dimension finie est essentielle. Voici brièvement décrit l'exemple de Borsuk. (Pour plus de détails, voir Borsuk, chap. 5, § 11.)

Soit Q le cube de Hilbert. On envisage les sous-espaces de Q suivants:

$$X_o = \{x = \{x_i\} \mid x_1 = 0\}$$

$$X_k = \left\{x = \{x_i\} \mid \frac{1}{k+1} \leq x_1 \leq \frac{1}{k}, \quad x_i = 0 \quad i > k\right\} . \; k = 1, 2, \ldots$$

On voit immédiatement que X_0 est homéomorphe au cube de Hilbert et que X_k est homéomorphe au cube de dimension k. Soit $\dot{X}^k$ le bord de X_k.

Soit $X = X_0 \bigcup\limits_{k \geqslant 1} \dot{X}^k$.

X est fermé dans Q; c'est donc un métrique compact. Il est localement contractible. La démonstration est immédiate pour un point qui n'appartient pas à X_0, mais plus délicate pour un point qui appartient à X_0.

Enfin, $H_i(X; \mathbf{Z}) \neq 0 \ \forall i$, car $\dot{X}^{i+1}$ n'est pas homologue à zéro dans X.

Ceci montre que X n'est pas un A.N.R., car si c'était le cas, il serait dominé par un C.W. complexe fini et aurait donc tous ses groupes d'homologie nuls, sauf un nombre fini d'entre eux.