Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES THÉORÈMES BIEN CONNUS SUR LES A.N.R. ET LES C.W. COMPLEXES

Autor: Weber, C.

Kapitel: §4. Relations entre A.N.R. et C.W. complexes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41544

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(Palais, lemme 6.2.)

Une fois en possession de ce lemme, on poursuit la démonstration de la façon suivante:

Comme la relation « être dominé par » est transitive, on ne restreint pas la généralité en supposant que X est un ouvert d'un convexe contenu dans un E.V.T., localement convexe, métrisable.

On choisit un recouvrement ouvert $\{ W_\alpha \}_{\alpha \in A}$ de X par des ouverts convexes.

On choisit un recouvrement ouvert $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$ de X, satisfaisant la conclusion du lemme.

Soit K le complexe simplicial associé au recouvrement $\{ 0_\beta \}_{\beta \in B}$; on considérera K comme réalisé géométriquement dans $\mathbf{R}^{(B)}$, les sommets de K étant les vecteurs de la base standard.

Comme d'habitude, une partition de l'unité, associée au recouvrement $\{ 0_\beta \}$ fournit une application f de X dans K.

Si, pour tout $\beta \in B$, on choisit un point $x_\beta \in 0_\beta$, on définit une application linéaire de $\mathbf{R}^{(B)}$ dans l'E.V.T., dont la restriction g à K a son image dans X, car si une intersection $\bigcap_{i=1}^{n} 0_{\beta i} \neq \varnothing$, l'enveloppe convexe de sa réunion $\subset W_\alpha$, et donc dans X.

Pour une raison analogue $g \circ f$ est homotope à id_X.

C.q.f.d.

N. B.: La même preuve montre que si X est séparable, il est dominé par un C.W.-complexe dénombrable et que s'il est compact il est dominé par un C.W. complexe fini.

§ 4. Relations entre A.N.R. et C.W. complexes

Rappelons pour commencer quelques définitions et un théorème.

Soient X et Y deux espaces topologiques connexes et soit $f: X \to Y$ telle que $f: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ soit un isomorphisme, $\forall n$. On dit que f est alors une équivalence d'homotopie faible.

Par opposition, une équivalence d'homotopie (usuelle) est parfois appelée équivalence d'homotopie forte.

Théorème: Si X et Y sont deux espaces topologiques connexes dominés par des C.W. complexes, une équivalence d'homotopie faible entre X et Y est nécessairement une équivalence d'homotopie forte.

(J. H. C. Whitehead, thm. 1.)

N. B.: On passe des espaces connexes aux espaces non-connexes de façon évidente. Par « connexe », on entend « connexe par arcs ».

Rappelons maintenant un théorème dû à J. H. C. Whitehead, Giever, Milnor, etc. Pour une démonstration, voir Milnor [1].

THÉORÈME: Soit X un espace topologique connexe. Alors X a le type d'homotopie faible d'un C.W. complexe.

Idée de la démonstration: (Cf. Milnor [1].)

Soit $S(X)$ l'ensemble semi-simplicial ayant pour n-simplexes les applications continues $\varphi: \Delta^n \to X$; et les opérateurs « faces » et « dégénérescences » évidents.

Soit $|S(X)|$ la réalisation géométrique de $S(X)$.

On a une application $f: |S(X)| \to X$ naturelle. En effet, soit x un point de $|S(X)|$ appartenant à la n-cellule $\varphi: \Delta^n \to X$. Par définition, f envoie x sur $\varphi(x)$.

La restriction de f à chaque cellule est évidemment continue. Par la propriété fondamentale de la topologie faible, f est continue.

Enfin, Milnor montre que f induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

C.q.f.d.

Corollaire: Un espace topologique dominé par un C.W. complexe a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Corollaire: Un A.N.R. a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Corollaire: Un A.N.R. X est un A.R. si et seulement si $\pi_i(X) = 0 \forall i$.

Il est clair qu'un A.N.R. n'est pas homéomorphe à un C.W. complexe, en général.

Réciproquement, un C.W. complexe n'est généralement pas homéomorphe à un A.N.R. En effet, un C.W. complexe n'est, en principe, pas métrisable. On montre qu'un C.W. complexe est métrisable si et seulement s'il est localement fini. Dans ce cas, il est homéomorphe à un A.N.R. (voir Borsuk, chap. 4).

J'ignore si un C.W. complexe a toujours le type d'homotopie d'un A.N.R. En ce qui concerne les A.N.R. séparables, Milnor [2] rappelle que l'on a le théorème suivant:

THÉORÈME: Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

1) X est dominé par un C.W. complexe dénombrable;

2) X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable;

3) X a le type d'homotopie d'un complexe simplicial dénombrable, localement fini;

4) X a le type d'homotopie d'un A.N.R. séparable.

Indiquons brièvement sur quoi repose la démonstration:

a) 1) $\Rightarrow$ 2) Ceci est essentiellement une astuce de Whitehead [2]. X étant dominé par un C.W. complexe, $f: |S(X)| \to X$ est une équivalence d'homotopie. Soit g un inverse de f. Soit, de plus, K un C.W. complexe dénombrable et soient $\lambda: X \to K$ et $\mu: K \to X$ telles que $\mu \circ \lambda \simeq id_X$. Soit: $g \circ \mu: K \to |S(X)|$. Comme K est dénombrable, l'image de K par cette application est contenue dans un sous-complexe L_1 de $|S(X)|$, dénombrable.

Soit $H_t: |S(X)| \to |S(X)|$ une homotopie reliant l'identité à $g \circ f$. Soit L_2 un complexe contenant l'image de L_1 par l'homotopie H. On peut choisir L_2 dénombrable. En itérant indéfiniment le procédé, on construit une suite de sous-complexes dénombrables $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots L_k$ étant un sous-complexe contenant l'image par H de L_{k-1}. On a $L_1 \subset L_2 \subset \ldots$.

Soit $L = \bigcup_k L_k$. L est dénombrable.

Soit $f_1 = f | L \to X$ et soit $g_1 = g \circ \mu \circ \lambda: X \to L$.

On vérifie facilement que $g_1 f_1 \simeq id$ et $f_1 \circ g_1 \simeq id$.

2) $\Rightarrow$ 3) est le théorème 13 de Whitehead [1].

3) $\Rightarrow$ 4) et 4) $\Rightarrow$ 1) résultent de ce qui précède.

Corollaire: L'espace des lacets itérés n-fois $\Omega^n K$ où K est un C.W. complexe dénombrable a le type d'homotopie d'un C.W. complexe.

Ceci résulte du théorème précédent et du théorème de Kuratowski.

Whitehead remarque qu'un compact dominé par C.W. complexe est dominé par un C.W. complexe fini.

En conséquence, un A.N.R. compact est dominé par un polyèdre compact. (Cela résulte d'ailleurs aussi de la démonstration du théorème qui affirme qu'un A.N.R. est dominé par un C.W. complexe.)

Corollaire: L'homologie d'un A.N.R. compact est de type fini. Le groupe fondamental d'un A.N.R. compact est de présentation finie.

On démontre que, sur un A.N.R. compact, toutes les théories de l'homologie satisfaisant l'axiome de dimension coïncident.

(Borsuk, chap. 5.)

Problème : Est-ce qu'un A.N.R. compact X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe fini ?

Remarques: D'après ce qui précède, X a donc le type d'homotopie d'un C.W. complexe dénombrable, dominé par un C.W. complexe fini.

Or Wall a construit un exemple d'un C.W. complexe dénombrable dominé par un C.W. complexe fini, qui n'a pas le type d'homotopie d'un complexe fini. (Cf. Wall.)

Mais l'exemple de Wall n'implique pas que la réponse au problème précédent soit négative.

Si X est simplement connexe, il n'est pas difficile de voir que la réponse au problème est affirmative.

§ 5. Quelques exemples intéressants

A) On a le théorème suivant, dû à J. H. C. Whitehead.

Théorème: Soient X_1 et X_2 deux A.N.R. compacts (disjoints). Soit $X_0 \subset X_1$ un fermé qui soit aussi un A.N.R. Alors, si f_i: $X_0 \to X_2$ est une application continue, l'espace $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est un A.N.R. (compact).

Pour une démonstration, voir Borsuk [1], chap. 5, § 9. Si X_0, X_1, X_2 sont des A.R. compacts, alors $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est aussi un A.R. compact.

Ce théorème permet de construire des A.N.R. ou des A.R. qui ont une allure assez pathologique.

Par exemple : Soient

X_1 = un disque D^q fermé, $q \geqslant 2$;

X_0 = un segment fermé contenu dans l'intérieur de X_1;

X_2 = un disque D^n fermé, $n \geqslant q+1$;

f: $X_0 \to X_2$ une application continue surjective.

Alors l'espace $X = X_1 \, U_f \, X_2$ est un A.R. compact. Il n'est pas homéomorphe à un complexe simplicial, ou à un C.W. complexe.