$< \pi$, suivant la proposition 4, ou bien $\phi_i > \frac{\pi}{2}$ pour un seul indice, soit $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, et alors $\sum_1^4 \phi_i > \pi$, suivant la proposition 5. Donc la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ n'est jamais vraie pour un tétraèdre qui n'est pas normal. Cela démontre le théorème, compte tenu aussi de la proposition 3.

La borne supérieure de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ lorsque $\phi_4 > \frac{\pi}{2}$, par exemple, se réalise sur la frontière du domaine $U' \subset U$ obtenu en adjoignant les conditions

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} \geqq \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} \geqq \frac{\pi}{2}$$

aux relations définissant U. Sans entrer dans les détails, on remarque que l'ensemble des valeurs de $\sum_1^4 \phi_i - \pi$ sur des X_{d2} de la forme $A_4 A_3 A_1 A_2^\infty$ avec

$$\psi_{41} > \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{42} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{43} > \frac{\pi}{2},$$

admet le maximum

$$2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

qui semble être le supremum cherché.

Toutes les propriétés précédentes sont de caractère local, parce qu'elles se traduisent, d'une façon évidente, par des propriétés des angles que font deux à deux les six droites $d_{ij} = \Pi_k \cap \Pi_l$, en désignant par Π_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, quatre plans issus d'un même point de R^n et parallèles aux faces du tétraèdre.

Cas d'un simplexe quelconque $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$.

Les deux exemples suivants montrent que la relation $\sum_1^4 \phi_i = \pi$ ne peut pas s'étendre de la même façon à des simplexes de dimension $n \geqq 4$.

a) Le n-simplexe dont toutes les arêtes sont égales à a donne lieu aux relations

$$\omega^2 = \frac{n+1}{2^n} a^{2n}, \quad \tau_i = \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, \quad \sum_1^{n+1} \phi_i = (n+1) \arc\sin \sqrt{\frac{n+1}{2^n}},$$

donc $\sum_1^{n+1} \phi_i < \pi$ pour $n \geqq 4$, et $\sum_1^{n+1} \phi_i \to 0$ pour $n \to +\infty$.

b) Considérant le simplexe défini par n vecteurs orthonormés $\overrightarrow{x_{12}}, \overrightarrow{x_{13}}, ..., \overrightarrow{x_{1,n+1}}$, on obtient

$$\omega = 1, \tau_1 = 1, \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\sum_1^{n+1} \phi_i = \frac{\pi}{2} + n \arc\sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1},$$

$$\text{donc } \sum_1^{n+1} \phi_i < \pi \text{ pour } n \geqq 4, \text{ et } \sum_1^{n+1} \phi_i \to \frac{\pi}{2} \text{ pour } n \to +\infty .$$

EXERCICES.

1. R^n étant le plus petit espace linéaire contenant les points $a_1, ..., a_q$, déterminer le minimum de

$$f(x) = \sum_1^q \mu_i \,| x - a_i |^{\nu_i}, \quad (\mu_i > 0, \nu_i \geqq 1; i = 1, 2, \ldots, q),$$

lorsque x décrit un sous-espace linéaire de R^n.

2) Dans un tétraède $A_1 A_2 A_3 A_4$, soit $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ le dièdre des deux faces qui se coupent suivant l'arête $A_i A_j$. Démontrer la relation

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_{ij}} = x_{ij} x_{kl} \operatorname{ctg} \alpha_{kl} .$$

En déduire la formule

$$3\omega = x_{12} x_{34} (x_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} + x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12})$$
$$+ x_{13} x_{24} (x_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} + x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13}) + x_{14} x_{23} (x_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23} + x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14}).$$

3. Pour tout tétraèdre normal on a

$$x_{12} x_{34} \operatorname{ctg} \alpha_{12} \operatorname{ctg} \alpha_{34} = x_{13} x_{24} \operatorname{ctg} \alpha_{13} \operatorname{ctg} \alpha_{24} = x_{14} x_{23} \operatorname{ctg} \alpha_{14} \operatorname{ctg} \alpha_{23},$$
$$x_{12} \operatorname{tg} \alpha_{12} + x_{34} \operatorname{tg} \alpha_{34} = x_{13} \operatorname{tg} \alpha_{13} + x_{24} \operatorname{tg} \alpha_{24} = x_{14} \operatorname{tg} \alpha_{14} + x_{23} \operatorname{tg} \alpha_{23} .$$

4. Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs non coplanaires tels que $\vec{a}\vec{b} \neq 0$, $\vec{b}\vec{c} \neq 0$, $\vec{c}\vec{a} \neq 0$. Alors les angles formés par les vecteurs $(\vec{b}\vec{c})\,\vec{a}$, $(\vec{c}\vec{a})\,\vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})\,\vec{c}$ sont tous inférieurs ou tous supérieurs à $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas on pose

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|}$$

et dans le second

$$\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pi - \arcsin \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|} .$$

Démontrer la formule

$$\begin{aligned} &\phi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \phi\big(\vec{a}, \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}), \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\big) \\ &+ \phi\big(\vec{b}, \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}), \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})\big) + \phi\big(\vec{c}, \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}), \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})\big) = \pi \end{aligned}$$

(Reçu le 11 avril 1967)

M. Nikias Stavroulakis
105, rue de la Convention
Paris 15e

vide-leer-empty