

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES  
RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE  
**Autor:** Stavroulakis, Nikias  
**Kapitel:** II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS  
CONVEXES  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41543>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

L'ensemble  $f(U) \cup L(F)$  étant fermé, il contient la valeur  $\sup f$ ; donc on ne modifie pas le  $\sup (f(U) \cup L(F))$  en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à  $\sup f$ . Il en est ainsi en particulier des valeurs  $f(x)$  pour  $x \in E$ ,  $x \notin E_1$ , puisque  $f(x) = \sup f$ ,  $x \in E \Rightarrow x \in E_1$ , et aussi des valeurs inférieures à  $\sup L(F)$ , d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des  $\sup f$ ,  $\inf f$ , sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où  $U$  est un ouvert d'une variété  $C^1$  est immédiate, mais, pour éviter les complications,  $f$  doit alors être supposée différentiable en tout point de  $E$ ; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque  $f$  présente des discontinuités dans  $E_0$ .

## II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

Dans l'espace  $R^n$ , muni de la distance euclidienne, on se donne  $q$  points  $a_1, a_2, \dots, a_q$  tels que  $R^n$  soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^q \mu_i |x - a_i|^{v_i}$$

où  $\mu_i, v_i$  sont des nombres réels tels que  $\mu_i > 0$ ,  $v_i \geq 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Dans le cas trivial où  $n = 1$ ,  $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$ , on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_q) \},$$

parce que le graphe de  $f$  est alors une ligne brisée convexe de sommets  $(a_i, f(a_i))$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ); si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des  $x$ , la fonction  $f$  n'est pas strictement convexe.

**PROPOSITION.** *Le cas trivial ci-dessus étant écarté,  $f$  est toujours strictement convexe et l'équation  $df = 0$  admet une ou n'admet aucune solution.*

*Si  $df = 0$  pour  $x = x_0$ , le point  $x_0$  appartient à l'intérieur  $\overset{\circ}{T}$  de l'enveloppe convexe  $T$  des  $a_1, a_2, \dots, a_q$  et fournit le minimum. Si l'équation  $df = 0$  n'a pas de solution, on aura  $\inf f = \inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$ , ce qui montre en particulier que la solution  $x_0$  existe quand  $v_i > 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, q$ .*

**Démonstration.** La fonction  $|x|^v$ , où  $v \geq 1$ , étant convexe, il en est de même des  $\mu_i |x - a_i|^{v_i}$  et de leur somme  $f(x)$ . La fonction  $|x|^v$ , où  $v > 1$ , étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour  $f$  lorsqu'il existe un indice tel que  $v_i > 1$ . Lorsque  $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$ , alors  $n \geq 2$ ; donc,  $\forall x \in R^n$ ,  $\forall x' \in R^n$ , on aura  $|\alpha x + (1 - \alpha)x' - a_i| =$

$= | \alpha (x - a_i) + (1 - \alpha) (x' - a_i) | < \alpha | x - a_i | + (1 - \alpha) | x' - a_i |$ ,  
 $(0 < \alpha < 1)$ , pour un indice au moins, d'où le résultat dans ce cas aussi.

Comme  $f$  est strictement convexe,  $df = 0$  admet au plus une solution.

La relation

$$df = \left( \sum_{i=1}^q \mu_i v_i |x - a_i|^{v_i-2} (x - a_i) \right) dx$$

entraîne  $E_0 = \{ a_i \mid v_i = 1 \}$ . Si  $df = 0$  pour  $x = x_0$ , on a  $x_0 \notin \{ a_i \mid v_i = 1 \}$ ,  
 $E_1 = \{ x_0 \}$ , d'où, d'après (I. 1),  $\inf f = \inf (\{ f(a_i) \mid v_i = 1 \} \cup \{ f(x_0) \})$ ;  
 considérant la restriction de  $f$  à la ligne droite joignant  $x_0$  à un point  $a_i$  tel  
 que  $v_i = 1$ , on constate que  $f(x_0) < f(a_i)$ , d'où  $\inf f = f(x_0)$ . Si  $df(x) \neq 0$ ,  
 $\forall x \notin \{ a_i \mid v_i = 1 \}$ , on a  $E_1 = \emptyset$  et  $\inf f = \inf f(E_0) = \inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$ .

Si  $df = 0$  pour  $x = x_0$  et si  $x_0 \notin \overset{\circ}{T}$ , il existera un  $(n - 1)$  - plan  $H$   
 tel que  $x_0 \in H$ ,  $H \cap \overset{\circ}{T} = \emptyset$ . Soit  $e$  le vecteur unitaire normal à  $H$  définissant  
 le demi-espace défini par  $H$  contenant  $\overset{\circ}{T}$ . Alors la dérivée de  $f$  en  $x_0$  dans  
 la direction de  $e$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \sum_{i=1}^q \mu_i v_i |x_0 - a_i|^{v_i-2} (x_0 - a_i) e,$$

sera négative non nulle, ce qui est impossible; donc  $x_0 \in \overset{\circ}{T}$ .

**COROLLAIRE.** Lorsque  $\inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$  se réalise en deux points  
 de  $E_0 = \{ a_i \mid v_i = 1 \}$ , alors  $df = 0$  admet une solution  $x_0$ . Lorsque  
 $\inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$  se réalise en un seul point  $a_k$ , alors la solution  $x_0$  de  
 $df = 0$  existe si, et seulement si, dans une boule de centre  $a_k$  et de rayon  
 arbitrairement petit, il existe un point  $x$  tel que  $f(x) < f(a_k)$ .

Quand la solution  $x_0$  existe, on peut la déterminer, par rapport à des  
 coordonnées rectangulaires  $(x^1, \dots, x^n)$ , en limitant ses opérations dans le  
 domaine  $\overset{\circ}{T}$ . Posant

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial x^s}, \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

on voit que l'équation  $f_1 = 0$  admet une solution  $x^1 = \varphi^1(x^2, \dots, x^n)$   
 unique et telle que  $(\varphi^1(x^2, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n) \notin \{ a_i \mid v_i = 1 \}$ ; l'équa-  
 tion  $f_2(\varphi^1(x^2, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n) = 0$  admet aussi une solution unique  
 $x^2 = \varphi^2(x^3, \dots, x^n)$  et il en est de même de  $f_3(\varphi^1, \varphi^2, x^3, \dots, x^n) = 0$ , etc...  
 L'équation  $f_n(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^{n-1}, x^n) = 0$  fournit finalement la coordonnée  $x^n$   
 et, remplaçant successivement dans  $\varphi^{n-1}, \dots, \varphi^2, \varphi^1$ , on obtient aussi les  
 autres coordonnées  $x_0^{n-1}, \dots, x_0^2, x_0^1$  de  $x_0$ .

Suivant les données concrètes du problème, la recherche de  $x_0$  peut être simplifiée, notamment si  $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$ , cas dans lequel  $df = 0$  s'écrit

$$\sum_1^q \mu_i v_i = 0 \quad \text{où} \quad v_i = - \frac{x - a_i}{|x - a_i|}.$$

Lorsque, par exemple,  $n = 2, q = 3, v_1 = v_2 = v_3 = 1$ , la condition

$$\sum_1^3 \mu_i v_i = 0$$

ne peut être vraie que si  $\mu_1 + \mu_2 > \mu_3, |\mu_1 - \mu_2| < \mu_3$ ; donc quand ces relations ne sont pas remplies, on a  $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$ . Si elles sont remplies, on considère les angles  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$  d'un triangle  $A_1 A_2 A_3$  tel que  $|\overrightarrow{A_2 A_3}| = \mu_1, |\overrightarrow{A_3 A_1}| = \mu_2, |\overrightarrow{A_1 A_2}| = \mu_3$ ; alors, si les angles  $\pi - \hat{A}_1, \pi - \hat{A}_2, \pi - \hat{A}_3$  sont supérieurs respectivement aux angles  $\sphericalangle(a_2 a_1 a_3), \sphericalangle(a_3 a_2 a_1), \sphericalangle(a_1 a_3 a_2)$ , le point  $x_0$  existe et, compte tenu des  $\sphericalangle(a_2 x_0 a_3) = \pi - \hat{A}_1, \sphericalangle(a_3 x_0 a_1) = \pi - \hat{A}_2, \sphericalangle(a_1 x_0 a_2) = \pi - \hat{A}_3$ , se détermine facilement; en cas contraire, on a encore  $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$ .

### III. SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Etant donné un simplexe euclidien  $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ , on désigne par  $\overrightarrow{x_{ij}}$  le vecteur  $\overrightarrow{A_i A_j}$ , ce qui entraîne  $|\overrightarrow{x_{ij}}| = |\overrightarrow{x_{ji}}| = x_{ij} = x_{ji}, (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n+1)$ , et par  $\omega$  le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$ , issus de  $A_i$ . Ce volume, qui ne dépend pas du sommet choisi, permet d'associer à chaque sommet  $A_i$  un angle  $\phi_i$  défini par les conditions suivantes:

$$a) \quad \sin \phi_i = \tau_i = \frac{\omega}{x_{i1} x_{i2} \dots x_{i,i-1} x_{i,i+1} \dots x_{i,n+1}};$$

$$b) \quad 0 < \phi_i < \frac{\pi}{2}, \text{ lorsque parmi les angles que font les vecteurs}$$

$\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$ , pris deux à deux, il y en

a au moins un inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} \leq \phi_i < \pi$  en cas contraire.