

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES  
RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE  
**Autor:** Stavroulakis, Nikias  
**Kapitel:** I. Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41543>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES BORNES DE CERTAINES FONCTIONS ET SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Par Nikias STAVROULAKIS

## I. INTRODUCTION

Soit  $f: U \rightarrow \bar{R}$ ,  $\bar{R}$  étant la droite achevée, une fonction numérique continue sur un ouvert  $U$  de  $R^n$ , et  $E \subset U$  l'ensemble maximal, supposé non vide, possédant la propriété suivante:  $\forall x \in E$ , toutes les dérivées premières de  $f$  existent en  $x$ . Soit  $E_0$  le complémentaire de  $E$  dans  $U$  et  $E_1 \subset E$  l'ensemble maximal satisfaisant à la propriété suivante:  $\forall x \in E_1$ , toutes les dérivées premières de  $f$  s'annulent en  $x$ .

**PROPOSITION.** *En désignant par  $F$  la frontière de  $U$  dans  $\bar{R}^n$  et par  $L(F)$  l'ensemble des valeurs limites de  $f$  aux points de  $F$ , les bornes de  $f$  s'obtiennent par les formules*

$$\begin{aligned} \sup f &= \sup (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{ \sup L(F) \}), \\ \inf f &= \inf (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \{ \inf L(F) \}) \end{aligned} \quad (I.1)$$

ou par les formules équivalentes

$$\begin{aligned} \sup f &= \sup (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \overline{L(F)}), \\ \inf f &= \inf (f(E_0) \cup f(E_1) \cup \underline{L(F)}) \end{aligned}$$

où  $\overline{L(F)}$ ,  $\underline{L(F)}$  sont respectivement les ensembles des limites supérieures et inférieures de  $f$  aux points de  $F$ .

*Démonstration.* Bornons-nous à la démonstration de la première formule. Pour  $x \in \bar{U} = U \cup F$ , désignons par  $L_x$  l'ensemble des valeurs limites de  $f$  au point  $x$ . Alors

$$\sup f = \sup f(U) = \sup (f(U) \cup (\bigcup_{x \in U} L_x)).$$

Comme  $L_x = \{f(x)\}$ ,  $\forall x \in U$ , en vertu de la continuité, il s'ensuit

$$f(U) \cup (\bigcup_{x \in U} L_x) = f(U) \cup L(F) = f(E_0) \cup f(E) \cup L(F).$$

L'ensemble  $f(U) \cup L(F)$  étant fermé, il contient la valeur  $\sup f$ ; donc on ne modifie pas le  $\sup (f(U) \cup L(F))$  en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à  $\sup f$ . Il en est ainsi en particulier des valeurs  $f(x)$  pour  $x \in E$ ,  $x \notin E_1$ , puisque  $f(x) = \sup f$ ,  $x \in E \Rightarrow x \in E_1$ , et aussi des valeurs inférieures à  $\sup L(F)$ , d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des  $\sup f$ ,  $\inf f$ , sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où  $U$  est un ouvert d'une variété  $C^1$  est immédiate, mais, pour éviter les complications,  $f$  doit alors être supposée différentiable en tout point de  $E$ ; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque  $f$  présente des discontinuités dans  $E_0$ .

## II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

Dans l'espace  $R^n$ , muni de la distance euclidienne, on se donne  $q$  points  $a_1, a_2, \dots, a_q$  tels que  $R^n$  soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^q \mu_i |x - a_i|^{v_i}$$

où  $\mu_i, v_i$  sont des nombres réels tels que  $\mu_i > 0, v_i \geq 1, (i = 1, 2, \dots, q)$ . Dans le cas trivial où  $n = 1, v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$ , on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_q) \},$$

parce que le graphe de  $f$  est alors une ligne brisée convexe de sommets  $(a_i, f(a_i)), (i = 1, 2, \dots, q)$ ; si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des  $x$ , la fonction  $f$  n'est pas strictement convexe.

**PROPOSITION.** *Le cas trivial ci-dessus étant écarté,  $f$  est toujours strictement convexe et l'équation  $df = 0$  admet une ou n'admet aucune solution.*

*Si  $df = 0$  pour  $x = x_0$ , le point  $x_0$  appartient à l'intérieur  $\overset{\circ}{T}$  de l'enveloppe convexe  $T$  des  $a_1, a_2, \dots, a_q$  et fournit le minimum. Si l'équation  $df = 0$  n'a pas de solution, on aura  $\inf f = \inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$ , ce qui montre en particulier que la solution  $x_0$  existe quand  $v_i > 1$  pour  $i = 1, 2, \dots, q$ .*

**Démonstration.** La fonction  $|x|^v$ , où  $v \geq 1$ , étant convexe, il en est de même des  $\mu_i |x - a_i|^{v_i}$  et de leur somme  $f(x)$ . La fonction  $|x|^v$ , où  $v > 1$ , étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour  $f$  lorsqu'il existe un indice tel que  $v_i > 1$ . Lorsque  $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$ , alors  $n \geq 2$ ; donc,  $\forall x \in R^n, \forall x' \in R^n$ , on aura  $|\alpha x + (1 - \alpha)x' - a_i| =$