Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION AUX POLYNOMES D'UN NŒUD

Autor: de Rham, Georges

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-41542

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 16.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# INTRODUCTION AUX POLYNOMES D'UN NŒUD

## Par Georges DE RHAM

1. Considérons un nœud, c'est-à-dire une courbe fermée simple C dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , dont la projection C' dans le plan  $\mathbb{R}^2$  n'a pas d'autres points singuliers que n points doubles à tangentes distinctes. Supposons que C et  $\mathbb{R}^3$  sont orientés. Pour fixer les idées, admettons que C coïncide avec sa projection C' sauf au voisinage des points doubles où l'un des arcs passe dessous. Les points de C situés sous les points doubles partagent C en n arcs  $C_1$ ,  $C_2$ , ...,  $C_n$ . Chaque point double est l'extrémité de la projection  $C'_i$  d'un arc  $C_i$  et l'origine de  $C'_{i+1}$  ( $C'_{n+1}$  devant être remplacé par  $C'_1$ ), et il est traversé par un autre arc  $C'_{j(i)}$ . Convenons de poser  $\varepsilon$  (i) = 1 si en allant de  $C'_i$  à  $C'_{i+1}$  on traverse  $C'_{j(i)}$  de gauche à droite et  $\varepsilon$  (i) = -1 dans le cas contraire.

Le groupe fondamental de  $\mathbb{R}^3 - C$ , qu'on appelle le groupe du nœud, peut être engendré par n éléments  $a_1, a_2, ..., a_n$ , qui satisfont aux n relations

(1) 
$$\begin{cases} a_i a_{j(i)} = a_{j(i)} a_{i+1} & \text{si} & \varepsilon(i) = 1 \\ a_{i+1} a_{j(i)} = a_{j(i)} a_i & \text{si} & \varepsilon(i) = -1 \end{cases} (i = 1, 2, ..., n).$$

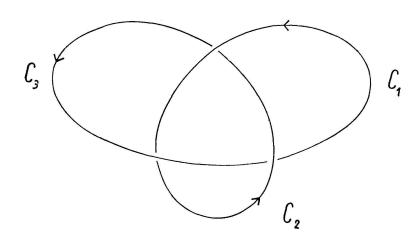
En choisissant pour définir le groupe un point base B situé au-dessus du plan  $\mathbb{R}^2$ ,  $a_i$  désigne la classe d'homotopie d'un chemin qui, partant de B, traverse  $\mathbb{R}^2$  à gauche de  $C_i$ , passe au-dessous de  $C_i$ , et retraverse  $\mathbb{R}^2$  à droite de  $C_i$  pour revenir en B, sans avoir passé dessous aucun autre arc  $C_k$ . A chaque point double correspond une relation (1), dans laquelle chaque membre est la classe d'homotopie d'un chemin qui, partant de B, traverse  $\mathbb{R}^2$  à gauche des arcs de C' passant par ce point double, passe sous les arcs correspondant de C et retraverse  $\mathbb{R}^2$  à droite pour ensuite revenir en B.

Par exemple, pour le nœud de trèfle représenté sur la figure, on a  $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = 1$ , j(1) = 3, j(2) = 1, j(3) = 2 et aux points doubles correspondent les relations

$$a_2 a_1 = a_1 a_3$$
,  $a_3 a_2 = a_2 a_1$ ,  $a_1 a_3 = a_3 a_2$ .

On démontre que ces éléments  $a_1, a_2, ..., a_n$  engendrent le groupe G du nœud, que toutes les relations qu'ils vérifient sont une conséquence des

relations (1) et que l'une quelconque de ces relations est une conséquence des n-1 autres (voir par exemple [1]). Partant de là, nous allons définir certains invariants aisément calculables qui se déduisent du groupe G: les polynômes d'Alexander ou polynômes du nœud.



2. Nous y serons conduits en cherchant les représentations de G dans le groupe  $\mathscr{L}$  des transformations linéaires d'une variable complexe (ou groupe des similitudes du plan). Etant donnés deux nombres complexes x et y,  $x \neq 0$ , désignons par (x, y) la transformation qui change z en z' = xz + y. On a les relations

$$(x, y)^{-1} = (x^{-1}, -x^{-1}y), \qquad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1).$$

Le groupe dérivé  $\mathcal{L}'$  ou groupe des commutateurs de  $\mathcal{L}$  est le groupe des translations (1, y), le groupe quotient  $\mathcal{L}/\mathcal{L}'$  est isomorphe au groupe multiplicatif  $C^*$  des nombres complexes  $\neq 0$ , l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{L}$  sur  $C^*$  envoyant (x, y) sur x.

Soit  $h: G \to \mathcal{L}$  un homomorphisme,  $h(a_i) = (x_i, y_i)$ . Les relations (1) entraînent immédiatement  $x_i = x_{i+1}$ , de sorte qu'on peut poser  $h(a_i) = (x, y_i)$  et ces relations donnent

(2) 
$$\begin{cases} (x-1)y_{j(i)} - xy_{i+1} + y_i = 0 & \text{si} & \varepsilon(i) = 1\\ (x-1)y_{j(i)} - xy_i + y_{i+1} = 0 & \text{si} & \varepsilon(i) = -1 \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, ..., n)$$

où naturellement, pour i = n,  $y_{n+1}$  doit être remplacé par  $y_1$ .

Ce système d'équations linéaires en  $y_1, y_2, ..., y_n$  représente la condition nécessaire et suffisante pour que h soit un homomorphisme.

Quel que soit x, il admet la solution  $y_i = c$ , constante quelconque indépendante de i, et pour x = 1 il n'y en a pas d'autres. Nous pouvons éliminer cette solution en imposant  $y_n = 0$ , ce qui revient à exiger que

l'origine z=0 soit le point fixe de la transformation  $h(a_n)$ ; si  $x \neq 1$ , la représentation est toujours conjuguée dans  $\mathcal{L}$  à une représentation ayant cette propriété (on peut prendre le point fixe de  $h(a_n)$  comme origine!). Nous pouvons aussi supprimer la dernière équation (2), relative à i=n, qui est une conséquence des autres, puisque la dernière relation (1) est une conséquence des autres. Il reste alors un système de (n-1) équations linéaires homogènes en  $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ , dont les coefficients dépendent de x et forment une matrice M.

Si  $\rho$  est un nombre complexe  $\neq 0$ , les représentations h pour lesquelles  $h(a_n) = \rho$  sont représentées par les vecteurs  $(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$  de  $\mathbb{C}^{n-1}$  qui satisfont à ce système où x est remplacé par  $\rho$ . Elles forment un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^{n-1}$ , de dimension  $n-1-r(\rho)$ ,  $r(\rho)$  étant le rang de la matrice M pour  $x = \rho$ .

Cela nous amène à considérer le plus grand commun diviseur  $\Delta_k(x)$  des mineurs d'ordre n-k de la matrice M. Ce sont justement les polynômes d'Alexander, ou polynômes du nœud. Et nous avons obtenu la proposition suivante:

Les représentations h de G dans  $\mathcal{L}$  pour lesquelles h  $(a_n) = (\rho, 0)$  forment un espace vectoriel complexe de dimension égale au plus grand entier k tel que  $\Delta_k$   $(\rho) = 0$ .

Chacun de ces polynômes est divisible par le suivant. Le premier, le plus intéressant, n'est autre que le déterminant de la matrice M. Notre système d'équation se réduisant pour x=1 à

$$\pm (y_i - y_{i+1}) = 1$$
  $(i = 1, 2, ..., n-2), \pm y_{n-1} = 0$ 

on voit que  $\Delta_1(1) = \pm 1$ . Par suite,  $\Delta_k(1) = \pm 1$  pour tout  $k \le n-1$ . Nous conviendrons de poser, pour  $k \ge n$ , par définition,  $\Delta_k(x) = 1$ .

La proposition ci-dessus montre que les racines de ces polynômes sont des invariants du nœud, liés à son groupe G.

D'après la théorie des matrices sur un anneau principal, la matrice M est équivalente, sur l'anneau Q(x) des polynômes en x à coefficients rationnels, à une matrice diagonale, dans laquelle chacun des éléments  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ...,  $\alpha_n$  de la diagonale principale divise le suivant (voir par exemple N. Bourbaki, Algèbre, chap. VII, pp. 94-95). On peut obtenir que chaque  $\alpha_i$  soit un polynôme en x à coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble; ils sont alors déterminés au signe près, et l'on a

$$\Delta_k = \pm \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-k}$$
. Si  $\alpha_{n-s}$  est de degré >0 et  $\alpha_i = 1$  pour  $i < n-s$ ,

en posant

$$\beta_t = \alpha_{n-t} \alpha_{n-t-1}^{-1} \quad (t = 1, 2, ..., s),$$

on a

$$\alpha_{n-s} = \beta_s$$
,  $\alpha_{n-s+1} = \beta_{s-1} \beta_s$ , ...,  $\alpha_{n-1} = \beta_1 \beta_2 ... \beta_s$ 

et par suite, au signe près,

$$\Delta_1 = \beta_1 \, \beta_2^2 \dots \beta_s^s$$
,  $\Delta_2 = \beta_2 \, \beta_3^2 \dots \beta_s^{s-1}$ , ...,  $\Delta_s = \beta_s$ 

et  $\Delta_k = 1$  pour k > s. Les  $\Delta_k$  sont ainsi déterminés par les polynômes  $\beta_s$ . Pour s'assurer que non seulement les racines des  $\Delta_k$  sont des invariants du nœud, mais aussi ces polynômes eux-mêmes, il faudrait caractériser l'ordre de multiplicité de ces racines. Si les racines de  $\alpha_{n-1} = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$  sont toutes simples, les relations ci-dessus font connaître ces ordres de multiplicité, et la connaissance des  $\Delta_k$  n'apporte rien de plus que celle de leurs racines. Cette circonstance se présente dans les exemples traités dans le livre de Richard H. Crowell et Ralph H. Fox ([1], pp. 124-132).

Mais nous allons reprendre la question d'un point de vue algébrique plus général et montrer que non seulement les polynômes  $\Delta_k$ , mais les idéaux  $J_k$  de l'anneau  $\mathbb{Z}[x]$  engendrés par les mineurs d'ordre n-k de la matrice M sont des invariants liés au groupe G.

3. Considérons plus généralement un groupe G tel que G/G' soit cyclique infini, comme pour le groupe d'un nœud, et supposons que l'on ait choisi un générateur x de G/G' (l'autre générateur étant  $x^{-1}$ ). Soit G'' le groupe dérivé de G' et  $\Gamma = G/G''$ . Son groupe dérivé  $\Gamma' = G'/G''$  est abélien et comme  $\Gamma/\Gamma' \simeq G/G'$ , nous identifierons  $\Gamma/\Gamma'$  avec G/G', de sorte que x sera aussi bien un générateur de  $\Gamma/\Gamma'$ . Chaque élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  induit un automorphisme de  $\Gamma'$ , qui change  $c \in \Gamma'$  en  $c^{\gamma} = \gamma c \gamma^{-1}$ . Cet automorphisme ne dépend que de la classe de  $\gamma$  (mod  $\Gamma'$ ), c'est-à-dire de l'image de  $\gamma$  dans  $\Gamma/\Gamma'$ , qui est une puissance  $x^k$  de x; cela parce que  $\Gamma'$  est abélien. En utilisant pour  $\Gamma'$  la notation additive, nous désignerons  $c^{\gamma}$  par  $x^k$  c. Ainsi  $G/G' = \Gamma/\Gamma'$  opère sur  $\Gamma'$  et  $\Gamma'$  se présente comme un module sur l'anneau  $A = \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma']$ . Cet anneau est formé des polynômes en x et  $x^{-1}$  à coefficients entiers.

Revenons un instant aux représentations h de G dans  $\mathscr{L}$ . Comme  $\mathscr{L}'$  est abélien,  $\mathscr{L}''$  est le groupe trivial (réduit à l'élément neutre) et par suite le noyau de tout homomorphisme de G dans  $\mathscr{L}$  contient G'' et les représentations de G dans  $\mathscr{L}$  se ramènent ainsi aux représentations de  $\Gamma$ . Elles ne peuvent donc nous renseigner que sur la structure de  $\Gamma$ . Les racines

des polynômes  $\Delta_k$  sont donc des invariants de  $\Gamma$ . Mais en étudiant directement le  $\Lambda$ -module  $\Gamma'$ , nous allons voir que non seulement les racines, mais ces polynômes eux-mêmes sont des invariants de  $\Gamma$ .

Supposons maintenant que G soit défini par un nombre fini de générateurs  $a_1, a_2, ..., a_n$  et un nombre fini de relations. Nous pouvons aussi supposer que l'image de  $a_n$  dans G/G' est précisément le générateur x, car on pourra toujours satisfaire à cette condition en ajoutant un générateur et une relation. Soit  $x^{n_i}$  l'image de  $a_i$  dans G/G'; alors  $b_i = a_i \, a_n^{-n_i}$  est dans G', et  $b_1, b_2, ..., b_{n-1}, a_n$  est un nouveau système de générateurs de G. Les  $b_i$  et tous leurs transformés par toutes les puissances de  $a_n$  engendrent G' et les relations de définition de G peuvent s'écrire avec ces éléments seulement. En remplaçant ces éléments par leurs images dans  $\Gamma'$ , désignant par  $c_i$  l'image de  $b_i$  et, passant à la notation additive, par  $x^k$   $c_i$  celle de  $a_n^k$   $b_i$   $a_n^{-k}$ , on déduit de ces relations un système de la forme:

(3) 
$$\sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} c_j = 0 \quad (i = 1, 2, ...)$$

où les  $p_{ij}$  sont des éléments de l'anneau  $A = \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma'] = \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ . Les  $c_i$  forment une base du A-module  $\Gamma'$  et les relations (3) le définissent complètement.

En multipliant chaque relation (3) par une puissance convenable de x, on peut obtenir que les  $p_{ij}$  soient des polynômes en x, ceux d'une même ligne de la matrice ne s'annulant pas tous pour x = 0. En remplaçant  $c_j$  par  $x^{m_j} c_j$  et choisissant convenablement  $m_j$ , on pourra obtenir aussi que ceux d'une même colonne ne s'annulent pas tous pour x = 0.

Dans le cas où G est le groupe d'un nœud défini comme plus haut, cette matrice  $P = \|p_{ij}\|$  n'est pas autre chose que la matrice M, comme on le vérifie facilement. Soit m-1 l'ordre maximum des mineurs de P non identiquement nuls,  $J_k$  l'idéal engendré par les mineurs d'ordre m-k et  $\Delta_k(x)$  leur plus grand commun diviseur. Dans le cas de la matrice M, on a m = n et  $\Delta_k(x)$  est bien le k-ième polynôme d'Alexander. Or nous allons voir que, dans le cas général, les polynômes  $\Delta_k(x)$  et aussi les idéaux  $J_k$  sont des invariants du A-module  $\Gamma'$ .

4. Considérons plus généralement un anneau commutatif quelconque A avec élément unité et un A-module de type fini  $\mathcal{M}$ . Nous allons définir une suite d'idéaux de A associée à  $\mathcal{M}$ , appelée la chaîne des idéaux élémentaires de  $\mathcal{M}^{1}$ ).

<sup>1)</sup> Comme me signale D. Amiguet, cette question fait l'objet d'un exercice de Bourbaki (Algèbre commutative, chap. 7, p. 106) qui nomme ces idéaux déterminantiels.

Soit  $S = (a_1, a_2, ..., a_n)$  un système de générateurs de  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{U}$  un A-module libre de rang n de base  $[u_1, u_2, ..., u_n]$ , h l'homomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{M}$  tel que  $h(u_i) = a_i$  (i = 1, 2, ..., n) et V le noyau de h, en sorte que  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{U}/V$ .

Les composantes des éléments v de V relativement à la base  $[u_1, u_2, ..., u_n]$ , c'est-à-dire les coefficients  $x_i$  des  $u_i$  dans l'expression  $v = \sum x_i u_i$ , engendrent un idéal qui ne dépend pas du choix de la base de  $\mathcal{U}$ , car il est engendré par les valeurs sur les éléments de V des formes linéaires sur  $\mathcal{U}$ ; désignons-le par  $a(\mathcal{U}, V)$ .

La puissance extérieure p-ième de  $\mathscr{U}$  est un A-module libre  $\mathscr{U}_p$  de rang  $\binom{n}{p}$ , ayant pour base les  $\binom{n}{p}$  produits extérieurs  $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \ldots \wedge u_{i_p}$   $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n)$ . Les produits extérieurs de p éléments de V engendrent un sous-module  $V_p$  de  $\mathscr{U}_p$  et leurs composantes engendrent l'idéal a  $(\mathscr{U}_p, V_p)$ . Il est clair que a  $(\mathscr{U}_p, V_p) \supset a$   $(\mathscr{U}_{p+1}, V_{p+1})$ , car si  $v \in V$  et  $w \in V_p$ , les composantes de  $v \wedge w$  sont des combinaisons linéaires de celles de w.

Ces idéaux étant déterminés à partir du système S, posons  $a_p(S) = a(\mathcal{U}_p, V_p)$  pour  $1 \le p \le n$ , et de plus  $a_p(S) = (1)$  si  $p \le 0$  et  $a_p(S) = (0)$  si p > n.

Considérons maintenant le système de générateurs  $S'=(a_1,a_2,...,a_n,a_n,a_{n+1})$  obtenu en adjoignant à S l'élément  $a_{n+1}=\sum_{1}^{n}y_i\,a_i\,(y_i\in A)$  et montrons que l'on a  $a_{p+1}\,(S')=a_p\,(S)$ .

Soit  $\mathcal{U}'$  le A-module libre de rang n+1, ayant pour base  $[u_1, ..., u_n, u_{n+1}]$ , en sorte que  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ . L'homomorphisme h s'étend, en posant  $h(u_{n+1}) = a_{n+1}$ , en un homomorphisme de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{M}$ . En remplaçant  $u_{n+1}$  par  $u = u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ , on a une autre base  $[u_1, ..., u_n, u]$  de  $\mathcal{U}'$  et h(u) = 0, d'où résulte que le noyau V' de l'homomorphisme h de  $\mathcal{U}'$  est engendré par u et V.

Soit encore  $\mathscr{U}_p$  la puissance extérieure p-ième de  $\mathscr{U}'$  et  $V_p$  le sous-module de  $\mathscr{U}_p$  engendré par les produits extérieurs de p éléments de V. Tout élément  $\xi$  de  $\mathscr{U}_{p+1}$  peut se mettre d'une manière unique sous la forme

$$\xi = \alpha \wedge u + \beta$$
 où  $\alpha \in \mathcal{U}_p$  et  $\beta \in \mathcal{U}_{p+1}$ .

Les composantes de  $\xi$  sont donc les composantes de  $\alpha$  et celles de  $\beta$ . Et chaque couple  $\alpha \in \mathcal{U}_p$ ,  $\beta \in \mathcal{U}_{p+1}$  définit un  $\xi \in \mathcal{U}_{p+1}'$ . Pour que  $\xi \in V_{p+1}'$ , il faut et il suffit que  $\alpha \in V_p$  et  $\beta \in V_{p+1}$ . Par suite, l'idéal  $a\left(\mathcal{U}_{p+1}', V_{p+1}'\right)$  engendré par les composantes des  $\xi \in V_{p+1}'$  est identique à l'idéal  $a\left(\mathcal{U}_p, V_p\right)$  engendré par les composantes des  $\alpha \in V_p$  (les composantes des  $\beta \in V_{p+1}$  appartenant aussi à cet idéal puisque  $a\left(\mathcal{U}_{p+1}, V_{p+1}\right) \subset a\left(\mathcal{U}_p, V_p\right)$ ).

Nous avons ainsi prouvé que  $a_{p+1}(S') = a_p(S)$ . Cela vaut aussi pour p = 0, car  $u \in V'$  ayant une composante égale à 1,  $a_1(S') = (1) = a_0(S)$ .

Soit alors  $\bar{S}$  un autre système quelconque de générateurs, en nombre m. La proposition établie entraîne  $a_{p+m}(S \cup \bar{S}) = a_p(S)$  et  $a_{p+n}(S \cup \bar{S}) = a_p(\bar{S})$ , d'où  $a_p(S) = a_{p+m-n}(\bar{S})$ . Nous voyons qu'en changeant le système de générateurs, on obtient la même suite d'idéaux qui est simplement décalée si les nombres de générateurs ne sont pas égaux.

Soit q l'indice du premier idéal  $a_p(S)$  égal à (0), de sorte que  $a_q(S) = (0)$  et  $a_{q-1}(S) \neq 0$ . Posons, pour  $k \geq 1$ ,  $J_k = a_{q-k}(S)$ . La suite croissante d'idéaux de A

$$J_1 \subset J_2 \subset ... \subset J_k \subset J_{k+1} \subset ... \subset (1)$$

qui se termine par (1) pour un  $k \le n$  ne dépend que du A-module  $\mathcal{M}$ : c'est la chaîne des idéaux élémentaires de  $\mathcal{M}$ .

Pour déterminer ces idéaux, on prend un ensemble de générateurs  $v_j$  (j = 1, 2, ..., m) de V, on les représente à l'aide de la base  $[u_1, ..., u_n]$  de  $\mathcal{U}$ ,

$$v_j = \sum_{k=1}^m y_{jk} u_k$$

et l'on considère la matrice des coefficients  $||y_{jk}||$ . Il résulte alors des règles de la multiplication extérieure que  $a_p(\mathcal{U}, V)$  est engendré par les mineurs d'ordre p de cette matrice.

5. Il résulte de là que les idéaux  $J_k$  définis à la fin du n° 4 sont précisément les idéaux élémentaires du A-module  $\Gamma' = G'/G''$ , A étant l'anneau  $\mathbb{Z}[G/G'] = \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ . Ainsi, à tout groupe G tel que G/G' est cyclique infini, est associée une chaîne d'idéaux élémentaires de cet anneau A.

Les unités de A sont les monômes  $\pm x^k$  et tout élément  $\neq 0$  de A est associé à un polynôme en x qui ne s'annule pas pour x=0, bien déterminé au signe près. On sait que ces polynômes se décomposent d'une manière unique en facteurs irréductibles, déterminés au signe près; les polynômes irréductibles de degré zéro étant les nombres premiers. Par suite, tout ensemble d'éléments de A, en particulier tout idéal, a un plus grand commun diviseur. Ainsi, à la chaîne des idéaux élémentaires  $J_k$  est associée une suite de polynômes  $\Delta_k$ ,  $\Delta_k$  étant le p.g.c.d. des éléments de  $J_k$ .

Dans le cas du groupe G d'un nœud,  $J_1$  est l'idéal principal engendré par le déterminant  $\Delta_1$  de la matrice M définie au n<sup>0</sup> 2, et les  $\Delta_k$  sont les polynômes d'Alexander dont l'invariance est ainsi complètement établie. Mais nous avons aussi prouvé que l'idéal  $J_k$  engendré par les mineurs

d'ordre n-k de M sont des invariants. Et cela est important: il existe en effet des nœuds dont les groupes ont les mêmes polynômes  $\Delta_k$  mais pas les mêmes idéaux  $J_k$ . Voir un exemple dans [1], pp. 128-130.

Il faut remarquer que la chaîne des idéaux élémentaires associée à un groupe G n'est bien déterminée que si l'on a choisi un générateur x de G/G'. En remplaçant x par l'autre générateur  $x^{-1}$ , ces idéaux sont changés en leurs conjugués par l'automorphisme  $x \rightarrow x^{-1}$  de A, et chaque polynôme  $\Delta_k$  est changé en le polynôme réciproque. Dans le cas du groupe d'un nœud, nous avons lié un générateur x à des orientations de C et de  $\mathbb{R}^3$ . Mais il faut ici mentionner un théorème profond de Seifert: les idéaux associés au groupe d'un nœud sont invariants par la conjugaison  $x \rightarrow x^{-1}$ , les polynômes  $\Delta_k$  sont réciproques [2]. Une démonstration particulièrement remarquable de ce théorème est celle de Milnor [3] (voir aussi [4]). Seifert a donné[2] un exemple d'un nœud dont le groupe G est tel que G' = G'', pour lequel  $\Gamma'$  est donc trivial, sans que G' le soit. La considération du A-module  $\Gamma'$  ne permet pas de distinguer un tel groupe du groupe cyclique infini. Seifert a alors recours à des représentations dans le groupe des déplacements du plan non-euclidien.

### **RÉFÉRENCES**

- [1] CROWELL, R. H. and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*. Ginn and Company, 1963.
- [2] Seifert, H., Ueber das Geschlecht von Knoten. *Math. Ann.*, vol. 110 (1934), pp. 571-592.
- [3] MILNOR, J., A duality theorem for Reidemeister torsion. Ann. of Math, 76 (1962), pp. 136-147.
- [4] DE RHAM, G., S. MAUMARY et M. A. KERVAIRE, Torsion et type simple d'homotopie. Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., Nr. 48.
- [5] Reidemeister, K., Knotentheorie, dans Ergebnisse der Math., vol. 1, nº 1 (1932). Reprint Chelsea, 1948, New-York.
- [6] NEUWIRTH, L. P., Knot Groups. Annals of Math. Studies, Nr. 56. Princeton Univ. Press, 1965.

G. de Rham Institut de Mathématiques Université de Genève (Reçu le 13 février 1968)