

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 13 (1967)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** OCTAÈDRES ARTICULÉS DE BRICARD  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**Kapitel:** 2. Dernier type d'octaèdre articulé  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41541>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ce quadrilatère possède trois éléments de symétrie: le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans  $AA'B$  et  $AA'B'$ , le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans  $BB'A$  et  $BB'A'$  et la perpendiculaire commune à  $AA'$  et  $BB'$ . Il y a trois façons de choisir  $S'$  pour chaque position de  $S$ . On peut même relier les sommets  $ABA'B'$  à ces trois points  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  sans modifier le degré de liberté du demi-octaèdre articulé; on obtient ainsi un système articulé de vingt barres.

## 2. DERNIER TYPE D'OCTAÈDRE ARTICULÉ

Considérons un quadrilatère  $ABA'B'$  et choisissons sur le support de chacun de ces côtés une direction. Ce qui permet de mesurer algébriquement les segments situés sur ces côtés.

Supposons que ces mesures algébriques vérifient la relation:

$$\overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'A} = 0. \quad (1)$$

Soient  $\alpha$  le plan bissecteur des côtés orientés  $B'A$  et  $AB$ ,  $\beta$  le plan bissecteur des côtés orientés  $AB$  et  $BA'$ ,  $\alpha'$  le plan bissecteur des côtés orientés  $BA'$  et  $A'B'$ ,  $\beta'$  le plan bissecteur des côtés orientés  $A'B'$  et  $B'A$ .

Si  $P$  est un point quelconque de la droite  $B'A$ , désignons par  $P_1, P_2, P_3, P_4$  les points qui s'en déduisent par les symétries successives par rapport aux plans  $\alpha$ , puis  $\beta$ , puis  $\alpha'$ , enfin  $\beta'$ . Le point  $P_1$  est sur  $AB$ , le point  $P_2$  sur  $BA'$ , le point  $P_3$  sur  $A'B'$ , le point  $P_4$  sur  $B'A$ .

De plus:

$$\begin{aligned} \overline{AP_1} &= \overline{AP} = \overline{B'P} - \overline{B'A} \\ \overline{BP_2} &= \overline{BP_1} = \overline{AP_1} - \overline{AB} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} \\ \overline{A'P_3} &= \overline{A'P_2} = \overline{BP_2} - \overline{BA'} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} - \overline{BA'} \\ \overline{B'P_4} &= \overline{B'P_3} = \overline{A'P_3} - \overline{A'B'} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} - \overline{BA'} - \overline{A'B'}. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse sur les mesures algébriques des côtés:

$$\overline{B'P_4} = \overline{B'P}.$$

Donc le produit des symétries par rapport à  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ , qui est un déplacement, conserve tous les points de  $AB'$ , c'est une rotation d'axe  $AB'$  ou la transformation identique.

Mais le produit des symétries par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$  est une rotation dont l'axe est l'intersection  $\alpha\beta$  de  $\alpha$  et  $\beta$ ; de même le produit des symétries par rapport à  $\alpha'$  et  $\beta'$  est une rotation dont l'axe est l'intersection  $\alpha'\beta'$  de  $\alpha'$  et  $\beta'$ .

Si le produit de ces rotations est une rotation d'axe  $AB'$  distincte de la transformation identique, les droites  $\alpha\beta$  et  $\alpha'\beta'$  se coupent sur  $AB'$ .

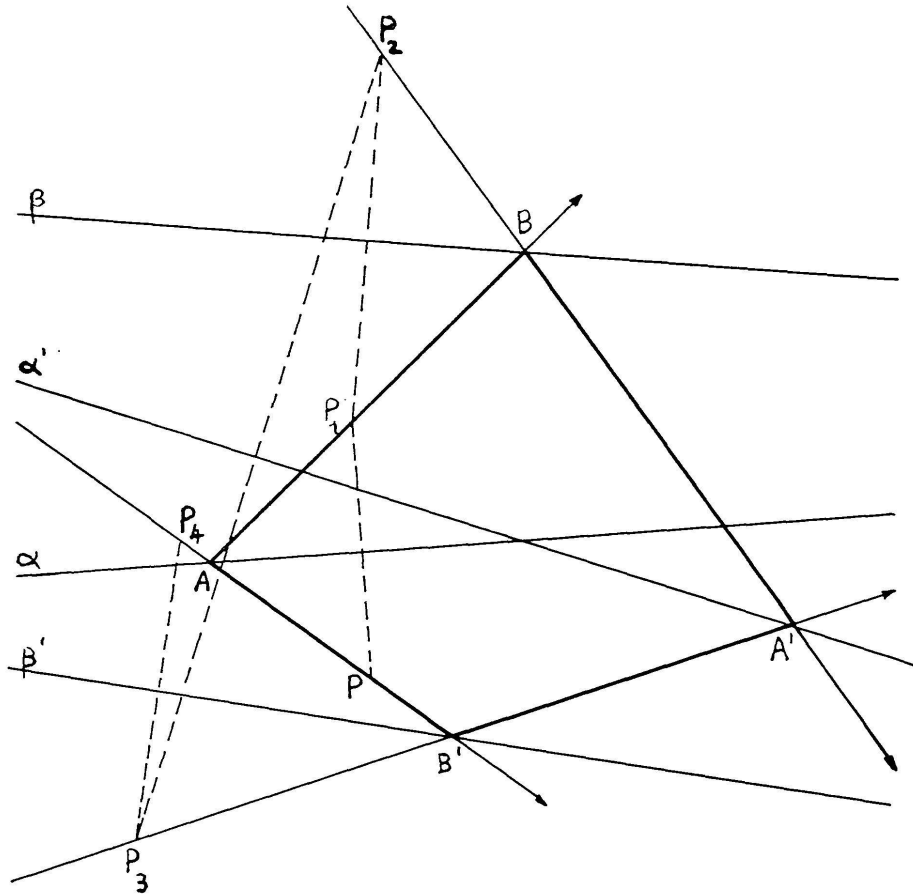


Fig 3

Mais la droite  $\alpha\beta$ , qui est contenue dans le plan  $\alpha$ , ne peut couper  $AB'$  qu'en  $A$  et la droite  $\alpha'\beta'$ , qui est contenue dans  $\beta'$  ne peut couper  $AB'$  qu'en  $B'$ , les droites  $\alpha\beta$  et  $\alpha'\beta'$  n'étant pas confondues avec  $AB'$  ne peuvent donc pas se couper sur  $AB'$  et le produit des rotations d'axes  $\alpha\beta$  et  $\alpha'\beta'$  est la transformation identique.

Ceci n'est possible que si ces deux droites sont confondues, c'est-à-dire si les quatre plans bissecteurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  ont en commun une droite  $XY$  (qui est rejetée à l'infini, si  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  sont parallèles, c'est-à-dire si le quadrilatère  $ABA'B'$  est un parallélogramme).

Réciproquement, si les quatre plans bissecteurs ont en commun une droite  $XY$ , orientons cette droite; les côtés orientés font le même angle avec cette droite orientée. Donc les mesures algébriques des segments:

$$\overline{AB}, \quad \overline{BA'}, \quad \overline{A'B'}, \quad \overline{B'A}$$

sont proportionnelles aux mesures de leurs projections sur  $XY$ ; comme la somme des mesures de ces projections est nulle, la somme des mesures des segments est également nulle.<sup>1)</sup>

L'égalité (1) se conserve dans une déformation du quadrilatère  $ABA'B'$  qui conserve les longueurs des côtés; donc les propriétés précédentes se conservent aussi dans cette déformation.

Remarquons encore qu'il est facile de construire des quadrilatères vérifiant l'égalité (1). En effet, si par une déformation, nous aplatissons le quadrilatère sur un plan  $P$ , les plans bissecteurs des côtés orientés deviennent les plans perpendiculaires à  $P$  passant par les bissectrices dans  $P$  des côtés orientés. Ces bissectrices concourent donc en un point  $K$  qui est également distant de ces côtés. Le quadrilatère aplati est donc circonscriptible à un cercle de centre  $K$ .

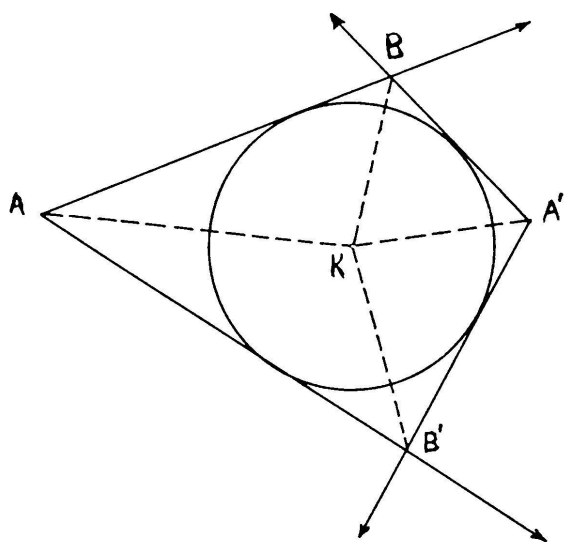


Fig 4

Réciproquement, si un quadrilatère plan est circonscrit à un cercle de centre  $K$ , la somme:

$$\overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'A}$$

est bien nulle, à condition d'orienter les côtés de manière qu'ils soient symétriques par rapport aux droites joignant  $K$  aux sommets  $A, B, A', B'$  (fig. 4).

Il suffit enfin de déformer un tel quadrilatère plan pour obtenir un quadrilatère gauche vérifiant l'égalité (1).

Considérons un quadrilatère  $ABA'B'$  vérifiant l'équation (1) et choisissons un plan  $\sigma$  passant par  $XY$ . Ce plan coupe  $AB$  en un point  $x$  et  $A'B'$  en un point  $x'$ . La droite  $xx'$ , située dans le plan  $\sigma$ , coupe  $XY$  en  $X$ ; la droite  $xx'$  est encore l'intersection des plans  $ABX$  et  $A'B'X$ . De plus, nous savons que les droites  $AB$  et  $A'B'$  sont homologues dans une rotation

<sup>1)</sup> Si les quatre plans bissecteurs ont en commun une droite  $XY$ ,

$$\overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'A} = 0.$$

Les côtés orientés font avec la droite  $XY$  orientée le même angle, les mesures algébriques des segments sont proportionnelles aux mesures de leurs projections sur  $XY$  et

$$\overline{ab} + \overline{ba'} + \overline{a'b'} + \overline{b'a} = 0 \quad (\text{relation de Chasles}).$$



d'axe  $XY$  (le produit des symétries par rapport aux plans  $\beta$  et  $\alpha'$ ); les plans  $ABX$  et  $A'B'X$  sont aussi homologues dans cette rotation. Ce qui exige que ces plans soient symétriques par rapport au plan qui contient  $XY$  et leur intersection  $xx'$ , c'est-à-dire au plan  $\sigma$ .

D'autre part,  $A'B$  coupe  $\sigma$  en un point  $y$ ,  $AB'$  coupe  $\sigma$  en un point  $y'$ ; la droite  $yy'$  coupe  $XY$  en un point  $Y$ .

Comme précédemment, les plans  $AB'Y$  et  $A'BY$  sont symétriques par rapport au plan  $\sigma$ . Les droites  $xx'$  et  $yy'$  du plan  $\sigma$  se coupent en un point  $S$  qui est commun aux quatre plans  $ABX$ ,  $A'B'X$ ,  $AB'Y$  et  $A'BY$ . La droite  $SA$ , qui est commune aux plans  $ABX$  et  $AB'Y$  est symétrique par rapport à  $\sigma$  de l'intersection des plans  $A'B'X$  et  $A'BY$ , c'est-à-dire de la droite  $SA'$ . De même les droites  $SB$  et  $SB'$  sont symétriques par rapport à  $\sigma$ . Le plan  $\sigma$  est un plan de symétrie pour l'angle polyèdre  $SABA'B'$ .

L'existence d'un plan de symétrie de l'angle polyèdre  $SABA'B'$  ne caractérise toutefois pas le demi-octaèdre  $SABA'B'$ .

En effet, on peut montrer qu'il existe des demi-octaèdres  $SABA'B'$ , tels que le quadrilatère  $ABA'B'$  vérifie la relation (1) et que  $SA$  et  $SA'$ ,  $SB$  et  $SB'$  soient respectivement symétriques par rapport à un plan ne passant pas par  $XY$ .

Or nous cherchons à construire un demi-octaèdre  $SABA'B'$ , tel que le quadrilatère  $ABA'B'$  vérifie la relation (1) et que  $SA$  et  $SA'$ ,  $SB$  et  $SB'$  soient respectivement symétriques par rapport au plan passant par  $XY$  et  $S$ , et nous venons de voir qu'il existe dans tout plan  $\sigma$  passant par  $XY$  un point  $S$  satisfaisant aux conditions précédentes, nous allons montrer que ce point  $S$  est unique.

Il se peut qu'il existe une infinité de points  $S$ , tels que  $SA$  et  $SA'$  d'une part,  $SB$  et  $SB'$  d'autre part, soient symétriques par rapport au plan  $\sigma$  passant par  $XY$  et  $S$ . Ce cas se produit lorsque le plan médiateur du segment  $AA'$  passe par  $XY$ . Mais il est inutile d'étudier ce cas. En effet, les points  $A$  et  $A'$  sont alors dans un même plan perpendiculaire à  $XY$ , et puisque ces points sont aussi sur les droites  $AB$  et  $A'B$  symétriques par rapport au plan  $\beta$  qui passe par  $XY$  et  $B$ , les points  $A$  et  $A'$  sont symétriques par rapport à ce plan. Donc le plan  $\beta$  est confondu avec le plan médiateur de  $AA'$ , ce qui entraîne:

$$AB = BA'.$$

De même le plan  $\beta'$  est confondu avec le plan médiateur de  $AA'$  et

$$AB' = B'A'.$$

Ces deux relations sont d'ailleurs vraies en signe, puisque les orientations de  $AB$  et  $BA'$ , par exemple, doivent être choisies symétriques par rapport au plan  $\beta$ .

Mais en comparant la relation (1) avec ces égalités, on obtient que :

$$\overline{AB} = \overline{B'A'}$$

et par suite :

$$\overline{AB} = \overline{BA'} = \overline{AB'} = \overline{B'A'}.$$

Les octaèdres correspondant aux quadrilatères qui vérifient ces égalités ont déjà été étudiés.

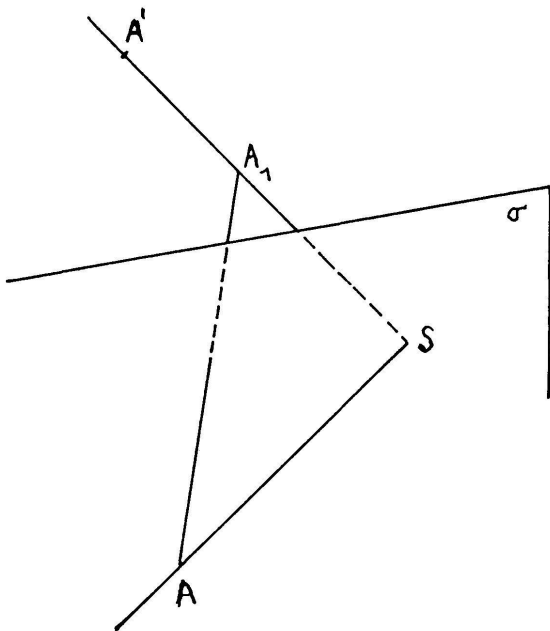


Fig 5

Si le plan médiateur de  $AA'$  ne passe pas par  $XY$ , le symétrique  $A_1$  de  $A$  par rapport à un plan  $\sigma$  passant par  $XY$  ne peut être confondu avec  $A'$ . Pour que  $SA$  et  $SA'$  soient symétriques par rapport à  $\sigma$ , il est nécessaire que les droites  $SA'$  et  $A'A_1$  soient confondues, c'est-à-dire que  $A_1$  soit situé sur  $SA'$  (fig. 5). Il n'existe donc qu'un point  $S$  dans le plan  $\sigma$ , tel que  $SA$  et  $SA'$  soient symétriques par rapport à  $\sigma$ . Mais nous avons montré qu'il existe un point  $S$  dans ce plan tel que  $SA$  et  $SA'$ ,  $SB$  et  $SB'$  soient respectivement symétriques par rapport à  $\sigma$ . Donc la propriété

que  $SA$  et  $SA'$  sont symétriques par rapport à  $\sigma$  a pour conséquence que  $SB$  et  $SB'$  sont aussi symétriques par rapport à ce plan.

Terminons la construction de l'octaèdre  $SABA'B'S'$ . Pour cela cherchons l'intersection  $S'$  des symétriques  $S'A$  de  $SA$  par rapport à  $\alpha$  et  $S'A'$  de  $SA'$  par rapport à  $\alpha'$ ; ces deux droites se coupent puisqu'elles peuvent être déduites l'une de l'autre par symétrie par rapport aux plans  $\alpha, \sigma, \alpha'$  qui passent tous par  $XY$ <sup>2)</sup>. De plus le produit des trois symétries précédentes

<sup>2)</sup>  $\Delta$  = symétrique de  $SA$  par rapport à  $\alpha$ ,  
 $\Delta'$  = symétrique de  $SA'$  par rapport à  $\alpha'$ ;  
symétrique de  $\Delta$  par rapport à  $\alpha = SA$ ,  
symétrique de  $SA$  par rapport à  $\sigma = SA'$ ,  
symétrique de  $SA'$  par rapport à  $\alpha' = \Delta'$ .

est la symétrie par rapport au plan  $\sigma'$  qui passe par  $XY$  et  $S'$ . Donc les plans bissecteurs des côtés successifs du quadrilatère  $SAA'S'$  passent par  $XY$  et ce quadrilatère vérifie l'égalité (1). Remarquons encore que le produit des symétries par rapport aux plans  $\alpha, \sigma, \alpha', \sigma'$  est la transformation identique. Ce qui montre notamment que l'angle des plans  $\alpha$  et  $\sigma$  est égal à l'angle des plans  $\sigma'$  et  $\alpha'$ .

D'après une propriété précédente, la condition que  $S'A$  et  $S'A'$  sont symétriques par rapport à  $\sigma'$  entraîne que  $S'B$  et  $S'B'$  le sont aussi. Construisons le point  $S''$  intersection des droites  $S''B$  symétrique de  $SB$  par rapport à  $\beta$  et  $S''B'$  symétrique de  $SB'$  par rapport à  $\beta'$ . Ce point est dans le plan  $\sigma''$  tel que l'angle de  $\beta$  et  $\sigma$  soit égal à celui de  $\sigma''$  et  $\beta'$ ; ce plan  $\sigma''$  est donc confondu avec  $\sigma'$ <sup>3)</sup>. De plus  $S''$  est tel que  $S''B$  et  $S''B'$  sont symétriques par rapport à  $\sigma'$ ; donc  $S''$  est confondu avec  $S'$ . Le quadrilatère  $SBB'S'$  vérifie par suite la relation (1).

En résumé, pour construire un octaèdre  $SABA'B'S'$  ayant les propriétés précédentes, il suffit d'imposer les trois conditions suivantes:

- 1) le quadrilatère  $ABA'B'$  vérifie la relation (1),
- 2) le quadrilatère  $SAA'S'$  vérifie la relation (1),
- 3) les axes  $XY$  correspondent aux quadrilatères précédents sont confondus.

Ces trois conditions caractérisent bien un tel octaèdre. En effet, les deux premières conditions entraînent que  $SA$  et  $SA'$  sont symétriques par rapport au plan  $\sigma$  passant par  $XY$  et  $S$  et que l'angle des plans  $\alpha$  et  $\sigma$  est égal à l'angle des plans  $\sigma'$  et  $\alpha'$ .

La dernière condition peut être traduite par des conditions métriques: l'angle des droites  $AB$  et  $SA$  est égal à l'angle des droites  $AB'$  et  $S'A$ , l'angle des droites  $AB'$  et  $SA$  est égal à l'angle des droites  $AB$  et  $S'A$ , l'angle des droites  $A'B$  et  $SA'$  est égal à l'angle des droites  $A'B'$  et  $S'A'$ , l'angle des droites  $A'B'$  et  $SA'$  est égal à l'angle des droites  $A'B$  et  $S'A'$ .

Il reste à montrer qu'un octaèdre soumis aux trois conditions précédentes peut être déformé en maintenant ses faces invariables. Comme nous l'avons

---

3)  
en effet

$(\alpha, \beta) = (\beta', \alpha')$	ou	$(\beta, \sigma) = (\sigma', \beta')$	→ $(\beta, \sigma) = (\sigma', \beta')$
		$(\beta, \alpha) = (\alpha', \beta')$	
	et	$(\alpha, \sigma) = (\sigma', \alpha')$	

comme

$(\beta, \sigma) = (\sigma'', \beta')$	$\sigma' \equiv \sigma''$ .
--	-----------------------------

déjà vu, le demi-octaèdre  $SABA' B'$  peut être déformé et sa déformation dépend d'un paramètre. Construisons, pour chaque position de ce demi-octaèdre le point  $S'$  intersection des droites  $S' A$  symétrique de  $SA$  par rapport au plan  $\alpha$  et  $S' A'$  symétrique de  $SA'$  par rapport au plan  $\alpha'$ . Les résultats précédents montrent les égalités d'angle de droites: <sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} (AB, SA) &= (AB', S' A) \\ (AB', SA) &= (AB, S' A) \\ (BA, SB) &= (BA', S' B) \\ (BA', SB) &= (BA, S' B) \\ (A' B, SA') &= (A' B', S' A') \\ (A' B', SA') &= (A' B, S' A') \\ (B' A, SB') &= (B' A', S' B') \\ (B' A', SB') &= (B' A, S' B') . \end{aligned}$$

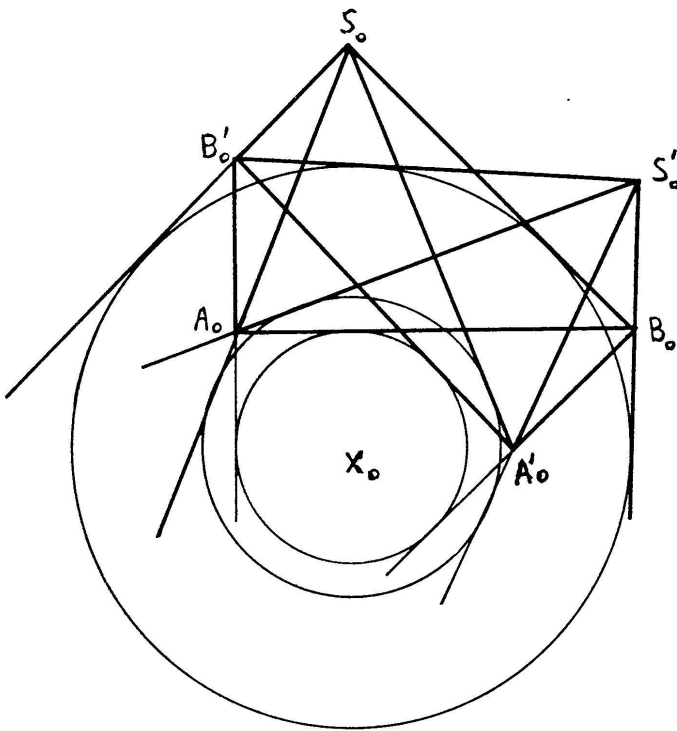


Fig 6

Mais dans la déformation du demi-octaèdre  $SABA' B'$  tous les premiers membres de ces égalités restent fixes, donc aussi les seconds membres. Les quatre triangles  $ABS'$ ,  $AB' S'$ ,  $B' A' S'$  et  $A' BS'$  ont chacun un côté constant et les deux angles adjacents à ce côté fixes; ces triangles restent donc invariables dans la déformation. Toutes les faces de l'octaèdre restent ainsi invariables.

Il est possible de construire un tel octaèdre de façon analogue à la construction précédente des quadrilatères  $ABA' B'$ .

Dans un plan, choisissons un triangle  $S_0 A_0 B_0$  et un point  $X_0$  qui ne soit situé sur aucun côté de ce triangle, et distinct du point de concours des

<sup>4)</sup> Les axes  $XY$  correspondant aux quadrilatères  $ABA' B'$  et  $ASA' S'$  sont confondus, les côtés de chacun des quadrilatères font les mêmes angles avec  $XY$ .

$(AB, XY) = (AB', XY) \rightarrow (AB, SA) = (AB', S' A) .$   
 $(XY, SA) = (XY, SA') .$

bissectrices. Construisons le point  $A'_0$  intersection de la droite symétrique de  $A_0 B_0$  par rapport à  $B_0 X_0$  et de la droite symétrique de  $A_0 S_0$  par rapport à  $S_0 X_0$ .

Construisons de façon analogue les points  $B'_0$  (intersection de la droite symétrique de  $B_0 S_0$  par rapport à  $S_0 X_0$  et de la droite symétrique de  $B_0 A_0$  par rapport à  $A_0 X_0$ ), et  $S'_0$  (intersection de la droite symétrique de  $S_0 A_0$  par rapport à  $A_0 X_0$  et de la droite symétrique de  $S_0 B_0$  par rapport à  $B_0 X_0$ ). Les quadrilatères  $A_0 B_0 A'_0 B'_0$ ,  $A_0 S_0 A'_0 S'_0$  et  $B_0 S_0 B'_0 S'_0$  sont circonscrits respectivement à trois cercles de centre  $X_0$ . (fig. 6)

Déformons alors la figure  $S_0 A_0 B_0 A'_0 B'_0 S'_0$  en laissant constants ses côtés de manière à obtenir un véritable octaèdre  $SABA' B' S'$  (non aplati). Les trois quadrilatères  $ABA' B'$ ,  $ASA' S'$ , et  $BSB' S'$  vérifient la relation (1), donc l'octaèdre  $SABA' B' S'$  vérifie les propriétés demandées.

**Vide-leer-empty**