Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OCTAÈDRES ARTICULÉS DE BRICARD

Autor: Lebesgue, Henri

Kapitel: 1. Premier type d'octaèdre articulé

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41541

Bricard a recherché et obtenu tous les types possibles d'octaèdres articulés. Nous allons décrire et étudier les types obtenus, sans toutefois chercher à montrer que ce sont les seuls types possibles.

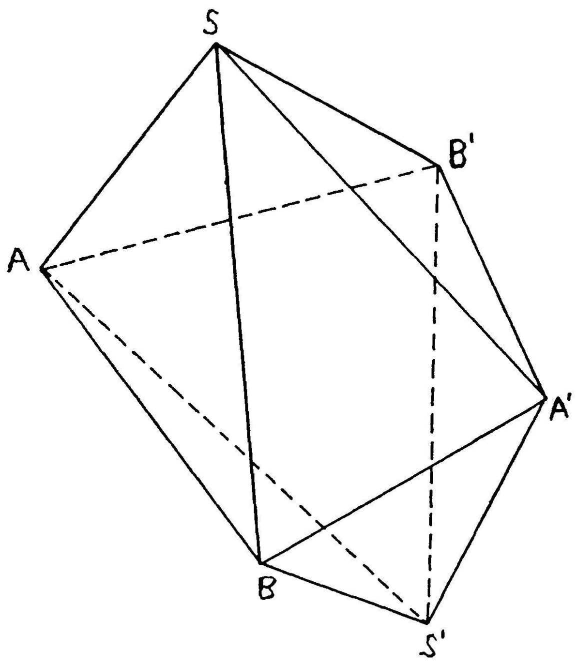

Fig 1

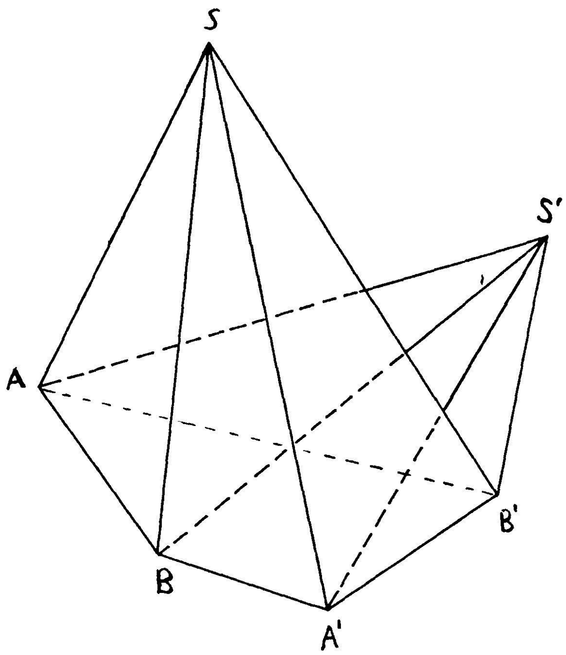

Fig 2

1. Premier type d'octaèdre articulé

Pour réaliser un octaèdre, dont nous désignerons les sommets par $SABA'\,B'\,S'$, commençons par réaliser les quatre faces, qui ont en commun le point S, c'est-à-dire les faces SAB, SBA', $SA'\,B'$ et $SB'\,A$; pour cela nous articulons entre elles les tiges qui matérialisent les différents côtés SA, SB, SA', SB', AB, BA', $A'\,B'$ et $B'\,A$. Pour terminer l'octaèdre, il suffira de placer les tiges, qui représentent les côtés $S'\,A$, $S'\,B$, $S'\,A'$ et $S'\,B'$ (fig. 2).

Remarquons d'abord que le demi-octaèdre formé par ces quatre premières faces est déformable et que sa déformation dépend d'un paramètre, quel que soit le choix des longueurs des arêtes. En effet, le quadrilatère gauche $ABA'\,B'$ est déformable et sa déformation dépend de deux paramètres, par exemple les longueurs des diagonales AA' et BB'. Si on ajoute à ce quadrilatère articulé les quatre tiges qui représentent les côtés SA, SB, SA' et SB', on n'introduit qu'une seule relation entre les paramètres précédents.

La déformation du demi-octaèdre obtenu dépend donc encore d'un paramètre.

Si on complète l'octaèdre en plaçant les tiges $S' A$, $S' B$, $S' A'$ et $S' B'$, on introduit une nouvelle relation entre les paramètres primitifs et ceux-ci se trouvent ainsi déterminés, à moins que la nouvelle relation introduite ne soit une conséquence de la relation précédente.

Or, choisissons le quadrilatère $ABA' B'$ de manière que

$$AB = AB' \qquad \text{et} \qquad A' B = A' B' .$$

Ce quadrilatère admet un plan de symétrie: le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans $AA' B$ et $AA' B'$. Choisissons S' symétrique de S par rapport à ce plan; les côtés vérifient les relations:

$$SA = S'A , \qquad SA' = S' A' , \qquad SB = S' B' , \qquad SB' = S' B .$$

Lorsque le demi-octaèdre se déforme de manière que les côtés SA, SB, SA', SB' restent constants, il en est de même des longueurs $S' A$, $S' B$, $S' A'$ et $S' B'$.

L'introduction de nouvelles tiges entre S' et les sommets A, B, A', B' n'introduit donc pas de nouvelle relation entre les paramètres qui définissent le demi-octaèdre; l'octaèdre articulé $SABA' B' S'$ possède le même degré de liberté que le demi-octaèdre.

Choisissons encore un quadrilatère $ABA' B'$, tel que:

$$AB = A' B' , \qquad \text{et} \qquad A' B = AB' .$$

Ce quadrilatère admet un axe de symétrie: la perpendiculaire commune à AA' et BB'. Choisissons pour sommet S' le symétrique de S par rapport à cet axe. Les côtés vérifient les relations:

$$SA = S' A' , \qquad SB = S' B' , \qquad SA' = S' A , \qquad SB' = S' B .$$

Lorsque le demi-octaèdre se déforme de manière que les côtés SA, SB, SA', SB' restent constants, il en est de même des longueurs $S' A$, $S' B$, $S' A'$ et $S' B'$. L'octaèdre articulé a donc le même degré de liberté que le demi-octaèdre.

Il faut remarquer que les deux constructions précédentes conduisent au même type d'octaèdre suivant le choix des sommets qui jouent le rôle de S et S'.

Enfin, si on choisit un quadrilatère $ABA' B'$, tel que:

$$AB = A' B' = A' B = AB' ,$$

ce quadrilatère possède trois éléments de symétrie: le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans $AA'B$ et $AA'B'$, le plan bissecteur du dièdre formé par les demi-plans $BB'A$ et $BB'A'$ et la perpendiculaire commune à AA' et BB'. Il y a trois façons de choisir S' pour chaque position de S. On peut même relier les sommets $ABA'B'$ à ces trois points S', S'', S''' sans modifier le degré de liberté du demi-octaèdre articulé; on obtient ainsi un système articulé de vingt barres.

2. Dernier type d'octaèdre articulé

Considérons un quadrilatère $ABA'B'$ et choisissons sur le support de chacun de ces côtés une direction. Ce qui permet de mesurer algébriquement les segments situés sur ces côtés.

Supposons que ces mesures algébriques vérifient la relation:

$$\overline{AB} + \overline{BA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'A} = 0 . \tag{1}$$

Soient α le plan bissecteur des côtés orientés $B'A$ et AB, β le plan bissecteur des côtés orientés AB et BA', α' le plan bissecteur des côtés orientés BA' et $A'B'$, β' le plan bissecteur des côtés orientés $A'B'$ et $B'A$.

Si P est un point quelconque de la droite $B'A$, désignons par P_1, P_2, P_3, P_4 les points qui s'en déduisent par les symétries successives par rapport aux plans α, puis β, puis α', enfin β'. Le point P_1 est sur AB, le point P_2 sur BA', le point P_3 sur $A'B'$, le point P_4 sur $B'A$.

De plus:

$$\begin{aligned}
\overline{AP_1} &= \overline{AP} = \overline{B'P} - \overline{B'A} \\
\overline{BP_2} &= \overline{BP_1} = \overline{AP_1} - \overline{AB} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} \\
\overline{A'P_3} &= \overline{A'P_2} = \overline{BP_2} - \overline{BA'} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} - \overline{BA'} \\
\overline{B'P_4} &= \overline{B'P_3} = \overline{A'P_3} - \overline{A'B'} = \overline{B'P} - \overline{B'A} - \overline{AB} - \overline{BA'} - \overline{A'B'} .
\end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse sur les mesures algébriques des côtés:

$$\overline{B'P_4} = \overline{B'P} .$$

Donc le produit des symétries par rapport à α, β, α', β', qui est un déplacement, conserve tous les points de AB', c'est une rotation d'axe AB' ou la transformation identique.