Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DU MINIMAX

Autor: Choquet, Gustave

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41538

UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DU MINIMAX

par Gustave CHOQUET

L'utilisation de plus en plus fréquente du théorème du minimax, non seulement en théorie des jeux et en programmation linéaire, mais en Analyse (par exemple en théorie du potentiel) * rend désirable un éventail étendu de démonstrations, adaptées au niveau mathématique de l'utilisateur et au degré de généralité requis dans l'application qu'on a en vue.

Nous donnerons ici une démonstration élémentaire dans le cadre des espaces de dimension finie; et nous rappellerons également une démonstration classique basée sur le théorème du point fixe de Brouwer.

THÉORÈME: *Soient* X, Y *deux ensembles convexes compacts* ($X \subset R^p$, $Y \subset R^q$), *et soit* f *une fonction numérique continue sur* $X \times Y$, *convexe par rapport à* x, *concave par rapport à* y; *alors on a:*

$$\min_{x \in X} \left(\max_{y \in Y} f(x, y) \right) = \max_{y \in Y} \left(\min_{x \in X} f(x, y) \right).$$

On notera respectivement M_f et m_f ces deux quantités, définies pour f continue quelconque.

EXEMPLE: *Le cas le plus important est celui où* f *est la restriction* à $X \times Y$ *d'une fonction bilinéaire sur* $R^p \times R^q$.

LEMME 1. *Si le théorème est vrai lorsque* f *est, pour tout* x, *strictement concave par rapport à* y *(et pour tout* y, *strictement convexe par rapport à* x*), il est toujours vrai.*

En effet, désignons par α la trace sur X de la fonction strictement convexe Σx_i^2 (et par β la trace sur Y de $-\Sigma y_j^2$), et posons

$$f_\varepsilon (x, y) = f(x, y) + \varepsilon (\alpha (x) + \beta (y)) \quad \text{où } \varepsilon > 0 .$$

On a évidemment:

$$| M_{f_\varepsilon} - M_f | \leqq \varepsilon (\| \alpha \| + \| \beta \|) \quad \text{et} \quad | m_{f_\varepsilon} - m_f) \leqq \varepsilon (\| \alpha \| + \| \beta \|).$$

* FUGLEDE (Colloque de Théorie du potentiel 1964, Annales de l'Institut Fourier) a démontré, grâce au théorème du minimax, l'égalité de la *capacité* et de l'*encombrement* d'un compact, dans toute théorie du potentiel assez régulière.

Donc si $M_{f_\varepsilon} = m_{f_\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a aussi $M_f = m_f$.

LEMME 2. *Soit* f *une fonction numérique continue sur* $X \times Y$ (X, Y *espaces topologiques compacts).*

1) Pour tout $(a, b) \in X \times Y$ *tel que la fonction* $y \to f(a, y)$ *soit maximum en* $y = b$, *et la fonction* $x \to f(x, b)$ *minimum en* $x = a$, *on a :*

$$f(a, b) = M_f = m_f .$$

2) L'ensemble de ces (a, b) *(appelés points-selle de* f*) est de la forme* $A \times B$, *où* A, B *sont des fermés de* X, Y *respectivement.*

Démonstration. 1) Posons

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$$

(c'est une fonction continue de x). On a évidemment

$$\varphi(x) \geqq f(x, b) \geqq f(a, b) = \varphi(a) .$$

Donc

$$M_f = \min(\varphi) = \varphi(a) = f(a, b) .$$

De façon analogue, on montre que $m_f = f(a, b)$, d'où l'égalité cherchée.

2) Si (a, b) et (a', b') sont deux points-selle, (a', b) et (a, b') le sont aussi.

En effet, on a par exemple $f(a', b) \leqq f(a', b') = M_f$ et $f(a', b) \geqq f(a, b) = M_f$, donc $f(a', b) = M_f$ et les fonctions $f(a', y)$, $f(x, b)$ sont respectivement maximum en $y = b$ et minimum en $x = a'$.

Donc l'ensemble des points-selle est bien de la forme $A \times B$; que A, B soient fermés résulte de la continuité de f.

Remarque. Sous les hypothèses du théorème, φ, qui est le sup. d'une famille de fonctions convexes est convexe; et chacun des ensembles A, B est convexe (compte tenu de ce que φ étant convexe, atteint son minimum sur un convexe qui n'est autre que A; idem pour B).

Première démonstration. Rappelons l'énoncé du théorème de Brouwer:

Si K est un pavé compact de R^n, et g une application continue de K dans K, g admet au moins un point fixe (i.e. un point x tel que $x = g(x)$.

Comme seule intervient la nature topologique de A, le théorème s'étend évidemment à tout espace topologique homéomorphe à un pavé compact K, par exemple à tout convexe compact d'un R^n et à tout produit fini de tels convexes.

Soit alors f continue sur $X \times Y$, strictement convexe par rapport à x, strictement concave par rapport à y.

Pour tout $x \in X$, soit $\eta(x)$ le point unique de Y en lequel la fonction $y \to f(x, y)$ prend son maximum; et pour tout $y \in Y$, soit $\xi(y)$ le point unique de X en lequel la fonction $x \to f(x, y)$ prend son minimum.

Ces fonctions ξ et η sont continues (utiliser par exemple le fait que leur graphe dans $(X \times Y)$ est fermé donc compact, et que sa projection sur Y (resp. X) est bijective).

Donc l'application: $(x, y) \to (\xi(y), \eta(x))$ de $X \times Y$ dans lui-même est continue. Le théorème de Brouwer montre qu'elle a au moins un point fixe (a, b); la fonction $y \to f(a, y)$ prend son maximum pour $y = b$; la fonction $x \to f(x, b)$ prend son minimum pour $x = a$; donc d'après le lemme 2, on a:

$$M_F = m_F = f(a, b)\,.$$

Deuxième démonstration. On suppose à nouveau f strictement convexe par rapport à x, strictement concave par rapport à y.

Soit $(a, b) \in X \times Y$ tel que $\varphi(a) = M_F = f(a, b)$.

Par hypothèse, $y \to f(a, y)$ prend son maximum en $y = b$, et comme elle est strictement concave on a: $f(a, y) < M_F$ pour tout $y \neq b$, autrement dit

$$(a, y) \in \Omega = \{\, (x, y) : f(x, y) < M_F \,\}$$

(Ω est un ouvert de $X \times Y$).

Si on peut montrer que $(x, b) \notin \Omega$ pour tout $x \neq a$, on aura bien montré que la fonction $x \to f(x, b)$ est minimum pour $x = a$, donc que (a, b) est un point-selle de f, d'où le théorème d'après le lemme 2.

En effet, s'il existe $(a', b) \in \Omega$ avec $a' \neq a$, il existe aussi un voisinage ouvert ω de b dans Y tel que $\{ a' \} \times \omega \subset \Omega$. Comme pour tout $y \in \omega$, $f(x, y)$ est strictement convexe par rapport à x sur le segment d'extrémités (a, y), (a', y), avec $f \leqq M_F$ aux extrémités, on a: $(\,]\, a, a' \,[\,) \times \omega \subset \Omega$. Comme $(Y \dot{-} \omega)$ est compact et dans Ω, il existe $a'' \in \,]\, a, a' \,[$ tel que $[a, a''] \times (Y \dot{-} \omega) \subset \Omega$.

Il en résulte que $(\,]\, a, a'']\,) \times Y \subset \Omega$.

En particulier $\{ a'' \} \times Y \subset \Omega$ d'où $\varphi(a'') < \varphi(a) = M_F$, ce qui est absurde.

(Reçu le 15 octobre 1967).

G. Choquet
16, avenue d'Alembert
Antony 92
France

vide-leer-empty