

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, RACINE DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE
Autor: de Siebenthal, Jean
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41537>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, RACINE DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE *)

par Jean DE SIEBENTHAL

Toute théorie qui présente en germe les notions fondamentales d'une science peut être considérée comme une racine de cette science.

Or la géométrie descriptive rend sensible la notion d'application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre — à noyau non trivial —.

Donc la géométrie descriptive peut apparaître comme une racine de l'algèbre linéaire.

La première affirmation ne peut être contestée. Le but de cet exposé est d'établir la seconde, et d'en expliciter le contenu.

Si l'on ajoute avec M. J. Dieudonné [1] que *l'algèbre linéaire des mathématiciens modernes est la sève nourricière des mathématiques vivantes*, on peut dire sans exagérer que la géométrie descriptive a en elle de quoi enrichir substantiellement l'esprit de nos jeunes; elle n'est pas racine de l'algèbre linéaire seulement: elle présente lumineusement nombre d'êtres mathématiques d'importance fondamentale.

Je vais traiter le problème dans son ensemble, au niveau de l'enseignement secondaire comme au niveau universitaire. Une enquête effectuée auprès de la plupart des Hautes écoles techniques d'Europe (URSS comprise) a donné des résultats très divers. La géométrie descriptive traditionnelle est florissante dans plusieurs pays; par exemple en Roumanie, en Hongrie, en Allemagne. A Munich notamment, le professeur Dr O. Baier estime pleinement valables les réflexions de C. F. Gauss [2] faites en 1813, à propos de la géométrie de Monge:

... « Inzwischen ist es doch immer von höher Wichtigkeit, dass auch die geometrische Methode fortwährend cultivirt werde: Abgesehen davon, dass sie doch in manchen einzelnen Fällen unmittelbarer und kürzer zum Ziele führt, als die Analyse, besonders wenn diese nicht mit Gewandtheit gehandhabt wird, dass jene dann eine ihr eigenthümliche Eleganz hat, wird sie auch besonders in formeller Hinsicht und beim fröhern jugendlichen Studium unentbehrlich bleiben, um Einseitigkeit zu verhüten, den

*) Conférence prononcée devant la « Mathematische Vereinigung » de Berne le 17 février 1967.

Sinn für Strenge und Klarheit zu schärfen, und den Einsichten eine Lebendigkeit und Unmittelbarkeit zu geben, welche durch die analytischen Methoden weit weniger befördert, mitunter eher gefährdet werden ».

Dans d'autres pays, en France surtout, la géométrie descriptive traditionnelle a complètement disparu sans être remplacée, et cela au profit d'une algèbre linéaire désincarnée, dépourvue de tout lien organique avec le réel concret, immergée exclusivement dans l'esprit, et traduite en symboles littéraux purement typographiques. L'aspect ontologique est éliminé, pour faire triompher le seul aspect algorithmique [3]. Dans d'autres pays, la situation est moins nette. En m'appuyant sur un exposé antérieur [4], j'aimerais essayer de présenter une doctrine cohérente de la nature de la géométrie descriptive et de son insertion dans la mathématique, en allant jusqu'à son insertion dans la culture elle-même.

2. Exemple-type.

Fixons notre attention sur un cas type: une sphère de rayon unité considérée concrètement dans l'espace à l'aide d'une maquette et sa représentation par une axonométrie orthogonale: fig. 1. Essayons d'expliciter la richesse de cette situation.

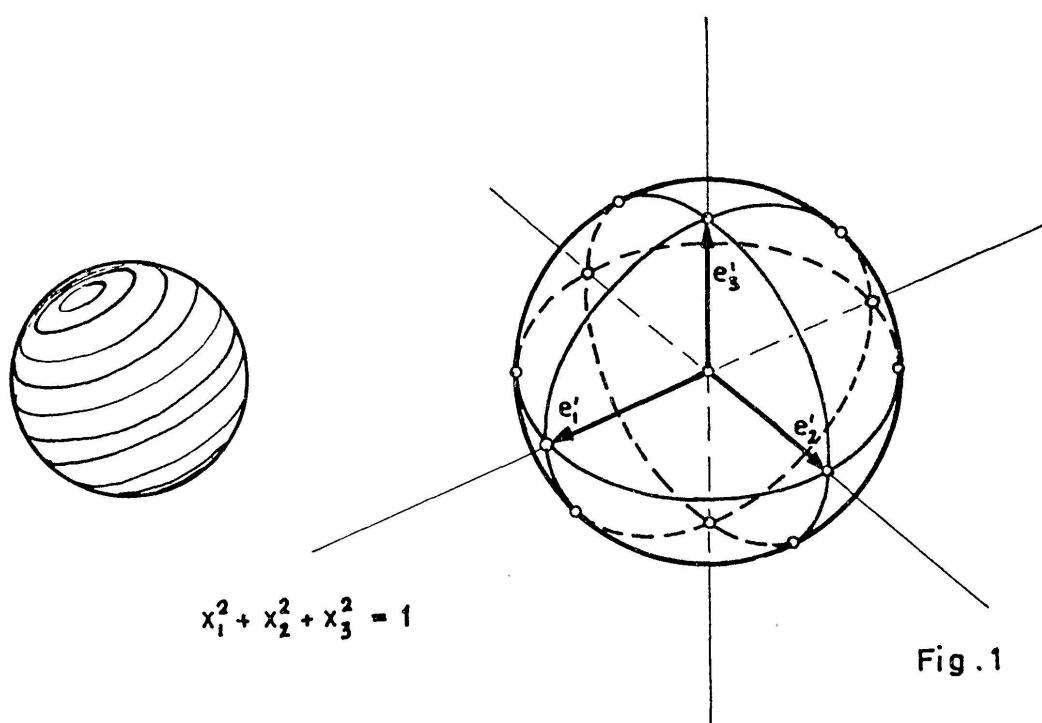


Fig. 1

3. Le point de vue ensembliste.

La sphère contenue dans l'espace euclidien E_3 est projetée orthogonalement sur un plan E_2 de E_3 .

E_3 et E_2 sont deux ensembles de points qu'il convient logiquement de séparer. De plus, tout point M de E_3 possède une image axonométrique M' . On a ainsi une application $\alpha: E_3 \rightarrow E_2$, ce qui incite à considérer de façon plus générale une application surjective

$$(1) \quad \boxed{\alpha: X \rightarrow X'}$$

d'un ensemble X dans un ensemble X' .

L'étude de la géométrie descriptive commence ainsi au niveau ensembliste; bien plus, la notion même d'application d'un ensemble dans un autre peut être présentée en termes de géométrie descriptive:

l'image réciproque $\alpha^{-1}(M')$ où $M' \in X'$ est une projetante:

$\alpha^{-1}(\alpha M)$ est la projetante de $M \in X$;

$\alpha^{-1}(\alpha A)$ est le cylindre projetant de $A \subset X$.

On peut appeler section de 1) toute partie de X qui rencontre chaque projetante en un élément et en un seul (fig. 2).

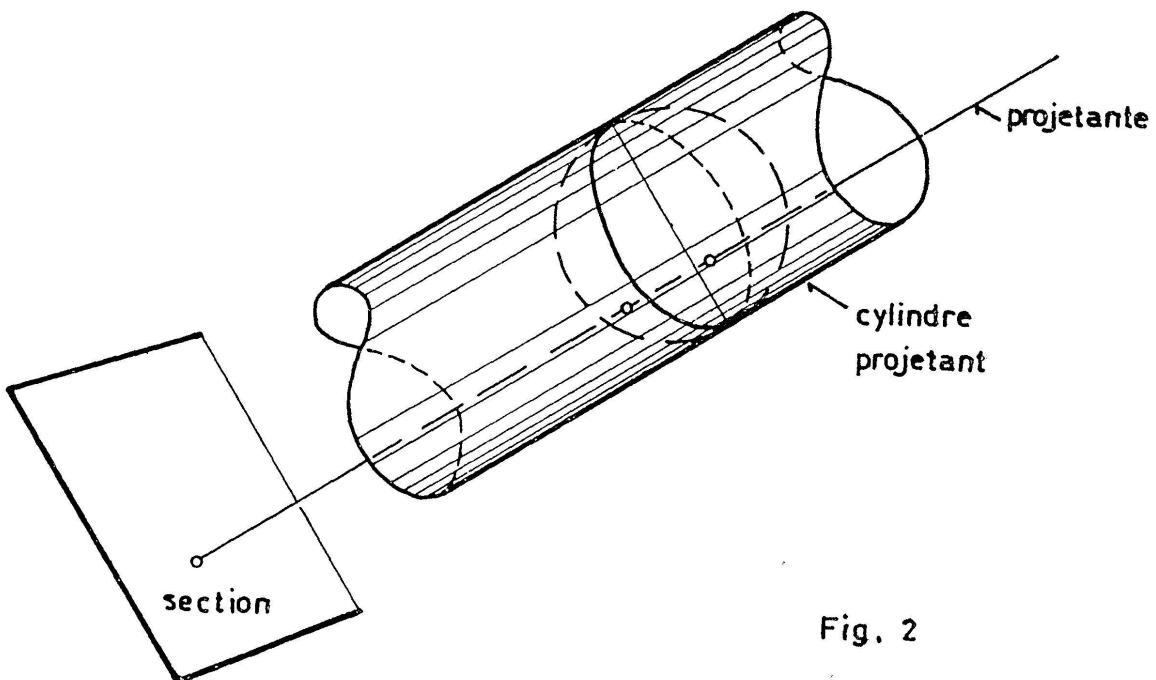


Fig. 2

Le but de la géométrie descriptive en cet état encore informe et larvaire, c'est l'étude d'une partie A de X à l'aide de son image $A' = \alpha(A)$.

L'application α est restreinte à A , d'où

$$(2) \quad \boxed{\alpha|_A: A \rightarrow X'}$$

L'image $\alpha(A)$ comme telle ne révèle rien de bien intéressant, et il faut préciser: on veut trouver dans A des parties B remarquables, essentielles, capables d'exprimer la nature de A , et telle que $\alpha|B$ soit autant que possible injective: B est « conservée » en ce sens qu'aucun élément de B n'est « perdu ». Dans le cas étudié, on peut prendre divers grands cercles (fig. 3):

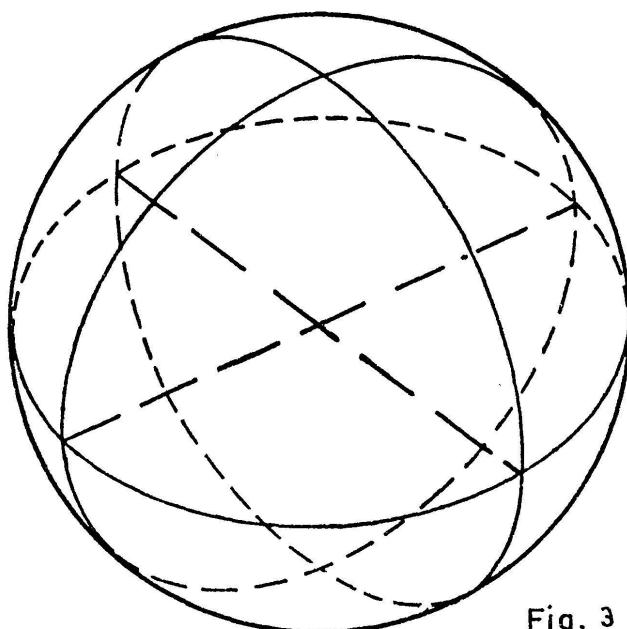


Fig. 3

La nébulosité ensembliste recèle d'autres trésors. Pourquoi ne pas représenter aussi des applications $\beta: X \rightarrow X$ et plus particulièrement des permutations de X : $\beta: X \rightarrow X$ bijective? On peut souvent exprimer la nature de β en choisissant une section B de α telle que βB soit encore une section. Alors $\beta|B$ détermine une bijection $\beta': X' \rightarrow X'$ qui représente β :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & B & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & X' \\ (\alpha|B)^{-1} & & \beta & & \alpha|B_1 \\ X' & \xrightarrow{\hspace{4cm}} & & & X' \\ & & \beta' & & \end{array}$$

D'une façon générale on peut représenter des bijections de section à section dans X .

Dans la représentation d'une partie $A \subset X$ par $\alpha: X \rightarrow X'$, on veut assez souvent utiliser les capacités « destructrices » de α au profit d'un aspect « simplifié » de A , et cela en prenant des parties remarquables de A constituées le plus possible à l'aide de projetantes de α . Le résultat présente une *saisie partielle simplificatrice* (fig. 4a) tandis que précédemment la représentation aspirait à une *saisie globale* (fig. 4b).

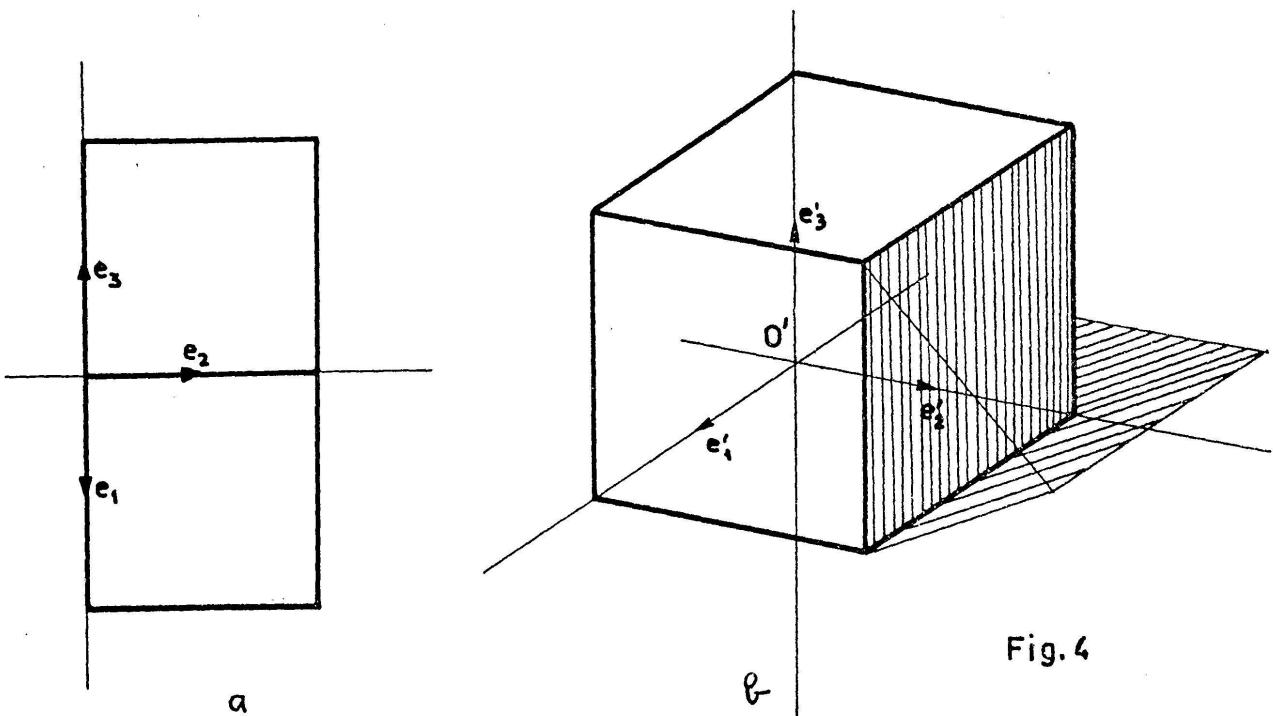


Fig. 4

La saisie partielle vise la technique de construction, tandis que la saisie globale s'oriente vers une plus grande compréhension de la partie A , et même vers l'aspect esthétique.

Notons que cette capacité simplificatrice de l'application $\alpha: X \rightarrow X'$ est l'une des grandes ressources des mathématiques: le passage d'un ensemble X au quotient $X \mid R$ par une relation d'équivalence R , les projectantes devenant les classes d'équivalence. La nature du quotient exprime partiellement la nature de X . La mathématique descriptive s'aventure ainsi dans des régions immenses et pose « cum grano salis » l'équation: application = description.

4. Le point de vue des applications linéaires.

Repronons l'exemple-type

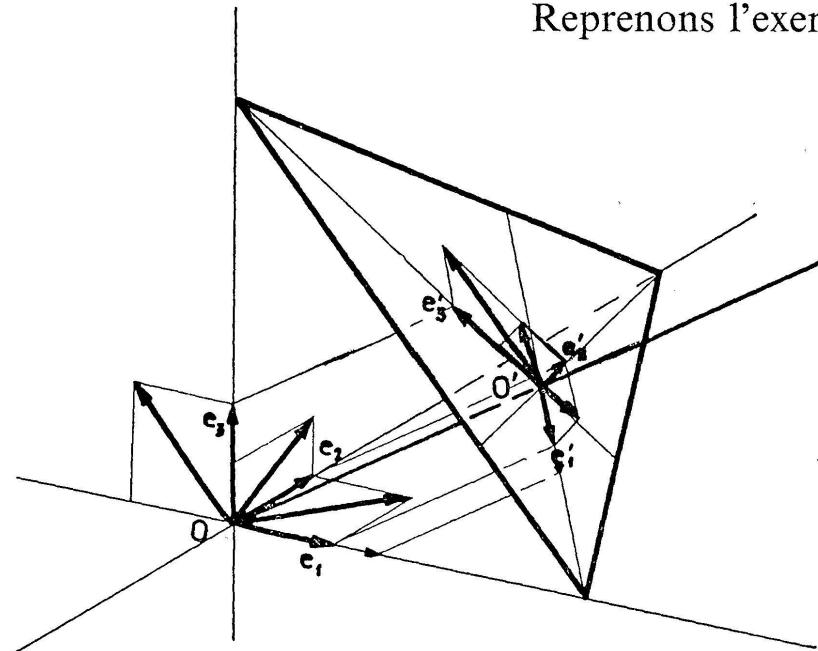


Fig. 5

La projection $\alpha: E_3 \rightarrow E_2$ applique 0 sur $0'$, transforme l'ensemble V_3 des rayons-vecteurs d'origine 0 dans E_3 en l'ensemble V_2 des rayons-vecteurs d'origine $0'$ dans E_2 . L'image de la somme de deux vecteurs est la somme des images, et l'image du produit d'un vecteur par un nombre est le produit par ce nombre de l'image du vecteur.

(3)

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$$

$$\alpha(\vec{\mu x}) = \mu(\vec{\alpha x})$$

$$\forall \mu \in \mathbf{R}$$

On a ainsi un exemple éclatant de morphisme d'espaces vectoriels et nous sommes ici au cœur de l'algèbre linéaire concrète.

Prenons \mathbf{R}^3 sous-jacent à E_3 et \mathbf{R}^2 sous-jacent à E_2 ; on a

$$\alpha: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

vérifiant 3)

Je ne distingue pas l'application linéaire α de l'application affine qui lui est associée

$$\begin{aligned}\alpha: \overrightarrow{OM} &\rightarrow \overrightarrow{O'M'} \\ \alpha: M &\rightarrow M'\end{aligned}$$

Ici α possède un noyau $\alpha^{-1}(0')$ qui est la projetante de 0.

C'est le moment de dégager de l'exemple-type les caractères propres de l'algèbre linéaire: on a deux espaces vectoriels X, X' sur un corps K ($= \mathbf{R}$) et une application linéaire $\alpha: X \rightarrow X'$.

X est un groupe commutatif muni d'une loi

$$(K, X) \rightarrow X$$

$$(k, x) \rightarrow kx$$

vérifiant les axiomes connus

$$k(x+y) = kx + ky; (k+k')x = kx + k'x; (kk'x) = k(k'x); 1x = x$$

De plus, $\alpha: X \rightarrow X'$ est linéaire si

$$\begin{aligned}\alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \\ \alpha(\mu x) &= \mu(\alpha x)\end{aligned}$$

La machine algorithmique se met alors en marche; dans X , pour mémoire:

notion de système de vecteurs libre;
» » » » » lié.

On appelle base tout système libre qui engendre X .

Définition: un espace vectoriel a n dimensions s'il existe un système de n vecteurs libre et si $n+1$ vecteurs quelconques sont liés.

On ne considère que des espaces vectoriels sur \mathbf{R} ayant une dimension finie.

Puis:

Un espace vectoriel X dans lequel il existe une base e_1, e_2, \dots, e_n a les propriétés:

- a) tout système libre de n vecteurs est une base;
- b) $n+1$ vecteurs sont liés;
- c) X est de dimension n .

Dans tout espace vectoriel X , p vecteurs quelconques formant un système libre engendrent un sous-espace de dimension p .

Deux sous-espaces X_1, X_2 sont supplémentaires si $X_1 + X_2 = X$ et si $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Alors la réunion d'une base de X_1 et d'une base de X_2 est une base de X ; tout sous-espace X_1 de X admet un supplémentaire X_2 .

Si X, X' sont deux espaces vectoriels et $\alpha: X \rightarrow X'$ linéaire,
 $\alpha(X)$ est un sous-espace: l'image de α , dont la dimension est le rang de α ;
 $\alpha^{-1}(0')$ est un sous-espace de X appelé noyau de α ou $\text{Ker } \alpha$;
 $\alpha: X \rightarrow X'$ injective équivaut à $\text{Ker } \alpha = 0$;
 $\alpha: X \rightarrow X'$ est un isomorphisme (par définition) si α est injective et surjective. α^{-1} est une application également isomorphique.

Soit $\alpha: X \rightarrow X'$ linéaire: la restriction de α à un supplémentaire S du noyau est un isomorphisme de S sur $\alpha(X)$.

La dimension de X est la somme des dimensions du noyau et de l'image.

L'AXONOMÉTRIE ORTHOGONALE FOURNIT UNE ILLUSTRATION DES NOTIONS ET PROPRIÉTÉS RELATIVES AU CAS D'UN NOYAU NON TRIVIAL.

Une libération devient possible. *Prenons une application quelconque $\alpha: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}'^2$ linéaire surjective et appelons-la encore axonométrie.*

Installons une base $e_1 e_2 e_3$ dans R^3 et une base $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dans \mathbf{R}'^2 . L'axonométrie se traduit par

$$x' = Ax \quad \text{ou} \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

α restreint à un supplémentaire du noyau étant un isomorphisme sur \mathbf{R}'^2 , ce supplémentaire est un plan et le noyau est une droite.

Considérant α comme une application affine:

- a) l'image de toute droite parallèle au noyau est un point;
- b) l'image de tout plan parallèle au noyau est une droite;
- c) l'image réciproque de tout point est une droite parallèle au noyau;
- d) l'image réciproque de toute droite est un plan parallèle au noyau.

L'axonométrie définie ici généralise la notion de projection parallèle, orthogonale ou oblique (fig. 6).

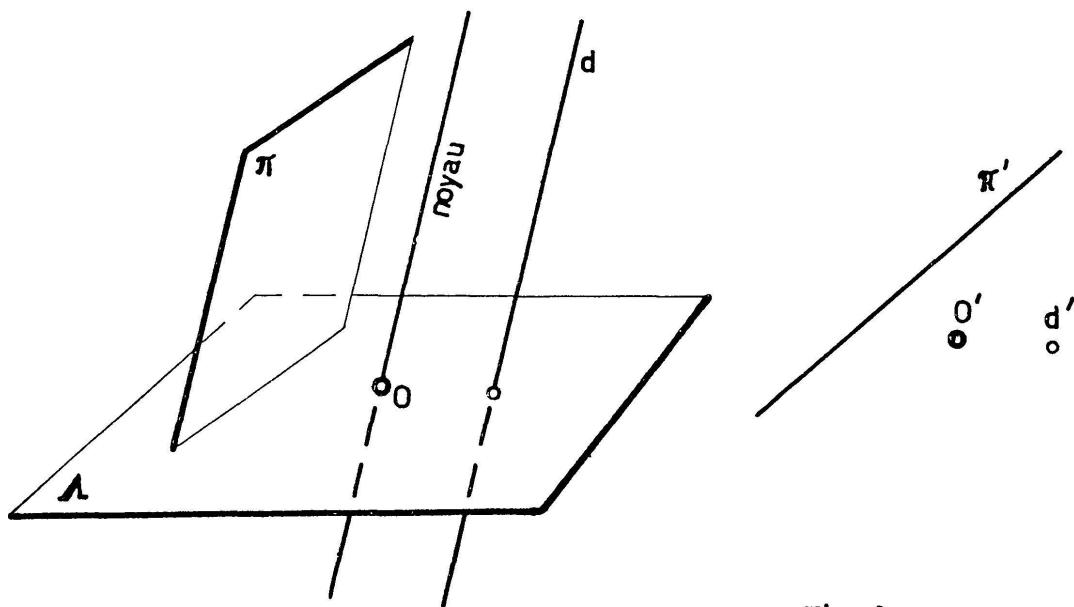


Fig. 6

5. La méthode du repère mobile.

L'exemple du n° 2 provoque une question: pourquoi *axonométrie* (orthogonale)? C'est parce que dans la représentation

- a) les *axes* apparaissent nettement;
- b) la construction s'effectue à l'aide de *mesures* faites sur ces axes.

Cette remarque permet de considérer le couple

— repère orthogonal	— image
$0 e_1 e_2 e_3$	$0' e'_1 e'_2 e'_3$

comme instrument fondamental de l'axonométrie.

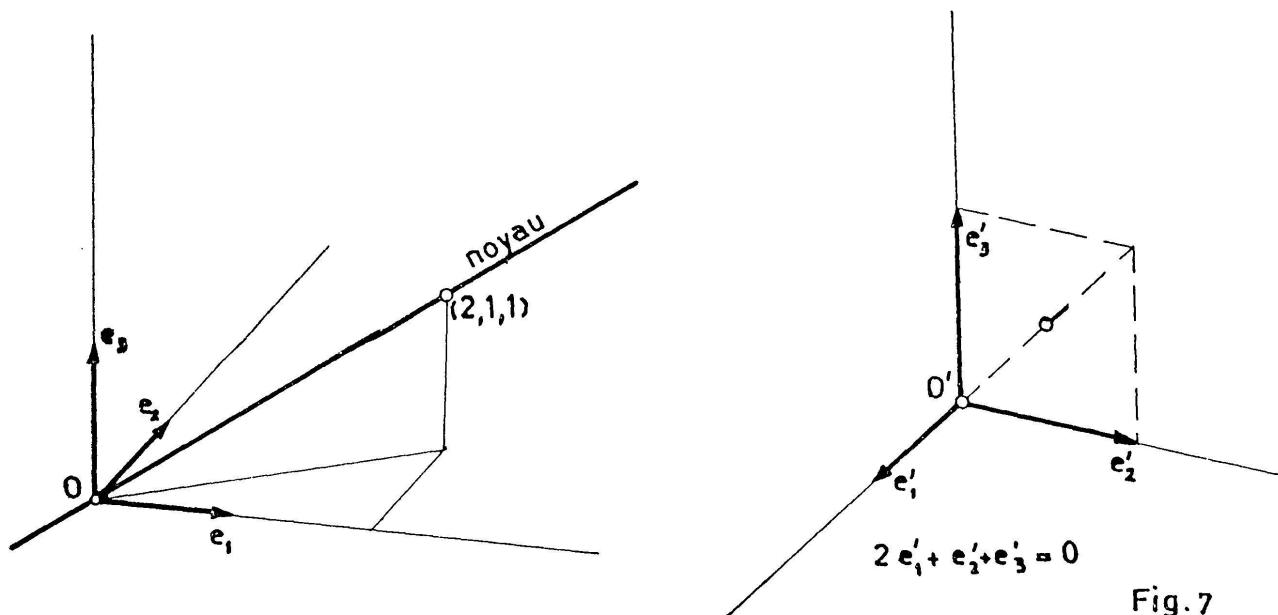


Fig. 7

Dans le cas général $\alpha: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, la simple donnée du système $0' e'_1 e'_2 e'_3$ (arbitraire) caractérise l'application linéaire (à supposer que $0 e_1 e_2 e_3$ soit donné). La relation

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$$

(λ_i non tous nuls) définit le noyau

$$\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2} = \frac{x_3}{\lambda_3}$$

dans \mathbf{R}^3

La donnée arbitraire d'un tel système sans souci d'une quelconque réalisation par projection parallèle, considérant je le répète \mathbf{R}^3 et \mathbf{R}^2 comme logiquement distincts, permet de réaliser rapidement des esquisses simples et « parlantes », ces dessins dits « dans l'espace », où apparaissent décryptées les énigmes auxquelles se réduisent souvent les projections de Monge pour les débutants.

L'axonométrie cavalière traditionnelle apparaît ainsi (fig. 8):

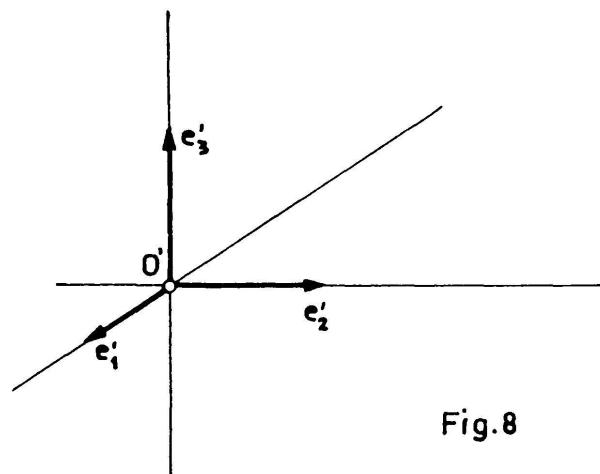


Fig.8

$0' e'_1 e'_2 e'_3'$ avec

$0' e'_2 e'_3'$	orthogonal
e'_1	quelconque

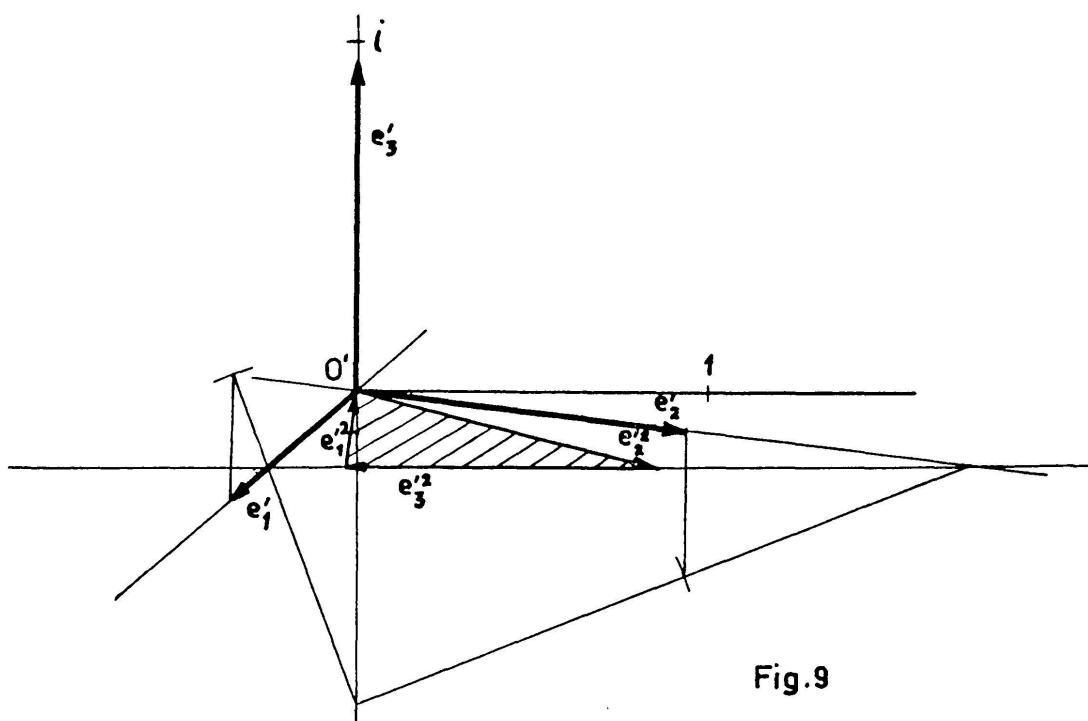


Fig.9

Le système caractéristique d'une *axonométrie orthogonale* est posé en prenant un repère orthonormal $0' \varepsilon_1 \varepsilon_2$ désigné par 1, i en notation complexe. Ensuite on écrit 3 nombres complexes.

e'_1, e'_2, e'_3' avec

$e'^2_1 + e'^2_2 + e'^2_3 = 0$
$ e'_1 ^2 + e'_2 ^2 + e'_3' ^2 = 2$

cf [6] p. 50-51.

La donnée d'une application linéaire $\alpha: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}'^n$ à l'aide du couple constitué par un repère

$0 e_1 e_2 \dots e_m$ de \mathbf{R}^m et par un système homologue:
 $0' e'_1 e'_2 \dots e'_{m'}$ de \mathbf{R}'^n

livre dans le cas $m = n$, $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}'^m$ la description d'un déplacement affine. C'est la méthode du repère mobile de E. Cartan qui apparaît. Elle donne quasi instantanément la théorie des translations, homothéties, affinités, etc. dans le plan et dans l'espace [5].

La mathématique des applications linéaires surjectives $\alpha: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}'^2$ s'étend donc au cas général

$$\alpha: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}'^n$$

Si α est injective, on obtient le plongement d'un sous-espace $\alpha(\mathbf{R}^m) \subset \mathbf{R}'^n$ (immersion).

Si α est surjective, on obtient les submersions $\alpha(\mathbf{R}^m) = \mathbf{R}'^n$. Se restreignant à $m, n \leq 3$ on obtient le tableau suivant, qui donne un cadre naturel à l'axonométrie

	\mathbf{R}'^1	\mathbf{R}'^2	\mathbf{R}'^3
\mathbf{R}^1	Isomorphismes et automorphismes de \mathbf{R}^1 transformations affines de \mathbf{R}^1	Droites dans \mathbf{R}'^2 représentation paramétrique	Droites dans \mathbf{R}'^3 représentation paramétrique
\mathbf{R}^2	Formes linéaires dans \mathbf{R}^2 équations de droites	Isomorphismes et automorphismes \mathbf{R}^2 transformations affines de \mathbf{R}^2	Plans dans \mathbf{R}'^3 représentation paramétrique
\mathbf{R}^3	Formes linéaires dans \mathbf{R}^3 équations de plans	Axonométries	Isomorphismes automorphismes de \mathbf{R}^3 transformations affines de \mathbf{R}^3

La suppression de la géométrie descriptive ainsi conçue crée un trou.

6. Le point de vue des espaces vectoriels topologiques.

La géométrie représentative permet maintenant de faire tomber sous le sens la notion d'application linéaire bornée.

Considérons \mathbf{R}^3 avec une base $e_1 e_2 e_3$ et posons

$$\|x\| = \max_{i=1,2,3} \{|x_i|\};$$

cette norme vérifie :

$\ x\ \geq 0 \quad \forall x$	$\ x+y\ \leq \ x\ + \ y\ \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^3$
$\ x\ = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$\ \lambda x\ = \lambda \cdot \ x\ \quad \lambda \in \mathbf{R}$

Appelons boule de centre a de rayon ρ

$$B(a, \rho) = \{x \mid \|x-a\| < \rho\}$$

\mathbf{R}^3 muni de $d(x, y) = \|x-y\|$ est un espace métrique. De même \mathbf{R}^{12} avec une base $e_1 e_2$ et $\|x'\| := \max_{i=1,2} \{|x_i|\}$

devient un espace métrique.

Toute application linéaire $\alpha: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^{12}$ est uniformément continue.

Preuve: α étant donnée par

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

posons $v = \max_{i=1,2} \{|a_{ij}|\}; \varepsilon > 0$ étant donné, prenons $\eta = \frac{\varepsilon}{3v}$.

Alors

$$\begin{aligned} |x_i| < \eta \Rightarrow |x'_i| &\leq |a_{i1}| \cdot |x_1| + |a_{i2}| \cdot |x_2| + |a_{i3}| \cdot |x_3| \\ &< (|a_{i1}| + |a_{i2}| + |a_{i3}|) \eta \\ &< 3v \eta = \varepsilon \end{aligned}$$

De là résulte

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta) : \|x - \bar{x}\| < \eta \Rightarrow \|\alpha(x - \bar{x})\| &< \varepsilon \\ \|\alpha(x) - \alpha(\bar{x})\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

L'image par α de la boule unité $B(0,1)$ est une figure bornée (hexagone).
Dans le cas de la norme euclidienne

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

l'image de la boule unité est un « disque » elliptique. On a

$$\begin{aligned}\|\alpha\| &= \text{Max} \|\alpha(x)\| \\ \|x\| &= 1\end{aligned}$$

C'est le demi-grand axe du contour apparent.

Qu'est-ce que représenter une partie non bornée de \mathbf{R}^3 ? C'est choisir une partie compacte remarquable $A_1 \subset A$ et en déduire $\alpha(A_1)$ également compacte.

7. Le point de vue des applications différentiables.

L'exemple-type contemplé une fois encore livre une notion qui agit en plein cœur d'un vaste secteur de la mathématique vivante, en procédant toujours de l'algèbre linéaire. C'est la notion de variété et d'application différentiable.

Par exemple (fig. 10) les hémisphères

$$x_3 > 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0$$

sont paramétrés par

$$x_1 x_2 \quad \text{et} \quad x'_1 x'_2$$

avec

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

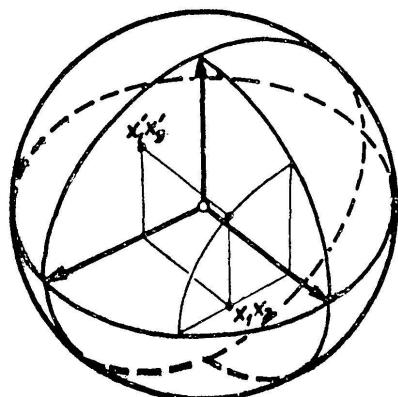


Fig. 10 dans la partie commune.

La sphère Σ en effet est un recouvrement de 6 hémisphères déterminés par les 3 plans de coordonnées. Chaque hémisphère est en homéomorphisme avec la projection orthogonale sur le plan de sa base, projection qui est un disque ouvert.

Une présentation soignée de la géométrie descriptive requiert ainsi une présentation correcte de la notion de surface (et de courbe).

Bien plus, lorsque ε subit l'axonométrie α , on restreint α à Σ , d'où une application différentiable.

$$\alpha : \Sigma \rightarrow R^2$$

avec

$$(x_1, x_2) \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \end{array} \right)$$

D'une façon plus générale, si

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = \sum x_i(u, v) e_i$$

définit un morceau de surface quadrillé Σ , on a une application différentiable.

$$(u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) \rightarrow \left(\frac{\sum x_i(u, v) a_{1i}}{\sum x_i(u, v) a_{2i}} \right)$$

Supposons le système

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

libre pour (u, v) dans le rectangle ouvert choisi; les vecteurs images \vec{r}'_u et \vec{r}'_v sont libres en général. Le plan tangent en $M_{u, v}$ ($OM_{u, v} \parallel \vec{r}(u, v)$) est conservé dans l'axonométrie; α est de rang 2 en $M_{u, v}$. Si \vec{r}'_u, \vec{r}'_v sont liés, le plan tangent est détruit; son image est une droite; il est « vu par la tranche »:

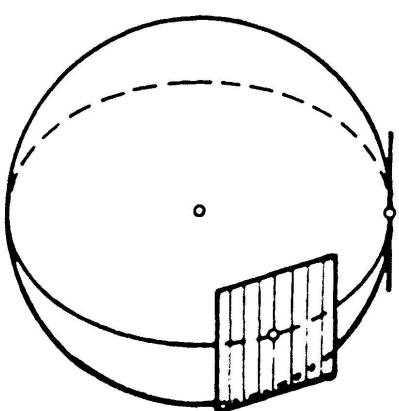


Fig.11

ici l'application est de rang 1 (fig. 11).

Le contour apparent de \sum est le lieu des points pour lesquels le rang de $\alpha | \sum$ est égal à 1.

La géométrie descriptive fait ainsi apparaître non seulement les notions fondamentales de l'algèbre linéaire et de la théorie des espaces normés, mais encore celles de la théorie des variétés différentiables, bien vivante aujourd'hui.

Le problème fondamental de la géométrie descriptive : faire saisir la nature d'une configuration spatiale, reçoit dans le cas d'une surface \sum la solution suivante :

- 1) *Lorsque \sum n'est pas compacte, on prend une partie caractéristique compacte (notée ici encore \sum).*
- 2) *On prend sur \sum des parties remarquables $\delta_1, \delta_2 \dots$ exprimant la nature de \sum :*
points singuliers, arêtes, génératrices, directrices, courbes faciles à définir ou à représenter, en particulier celles qui limitent éventuellement \sum .
- 3) *On détermine le contour apparent γ de \sum par ses contacts avec $\delta_1, \delta_2 \dots$ (méthode de la surface auxiliaire circonscrite).*

Dans \mathbf{R}^2 on a ainsi une partie compacte ε structurée par $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \gamma'$. La frontière ρ' de \sum' a une image réciproque φ sur ε qui doit être étudiée. Souvent $M \in \varphi \Rightarrow M \in \gamma$.

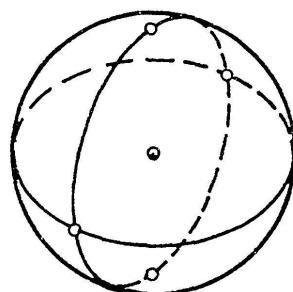
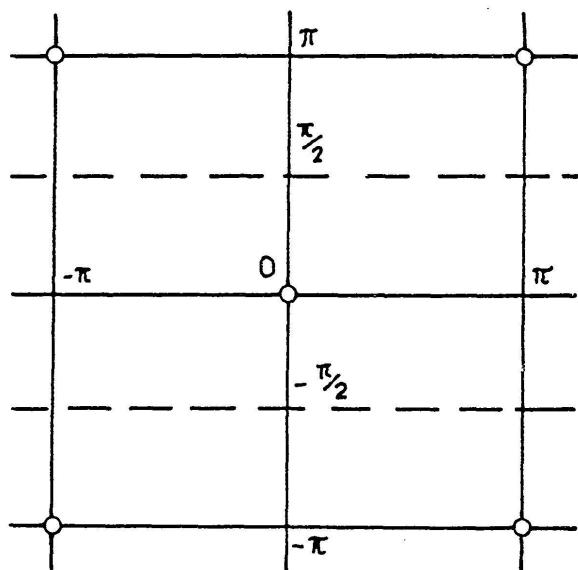


Fig. 12

L'exemple du n° 2 est un trésor difficile à épuiser. Soit en effet, la sphère ε

$$\begin{cases} x_1 = \cos l \cos L & L = \text{longitude} \\ x_2 = \cos l \sin L & l = \text{latitude} \\ x_3 = \sin l \end{cases}$$

Considérons les applications

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{\omega} \mathbf{R}^3 \xrightarrow{\alpha} \mathbf{R}'^2$$

$$(L, l) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos l \cos L \\ \cos l \sin L \\ \sin l \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \cos l \cos L + a_{12} \cos l \sin L + a_{13} \sin l \\ a_{21} \cos l \cos L + a_{22} \cos l \sin L + a_{23} \sin l \end{pmatrix}$$

L'application $\omega: \mathbf{R}^2 \rightarrow \omega(\mathbf{R}^2) = \sum$ est surjective: les $\omega^{-1}(x)$, $\forall x \in \sum$ forment une partition de \mathbf{R}^2 . L'image réciproque d'un pôle contient des parallèles au premier axe; l'image réciproque d'un autre point de ε est constituée de points isolés. La partition de \mathbf{R}^2 ainsi envisagée représente \sum à un point de vue tout différent, beaucoup moins « visuel ».

Dans ce sens, on peut étudier des courbes de \mathbf{R}^3 à l'aide de triptyques:

$$\begin{array}{ccccc} & \omega & & \alpha & \\ \mathbf{R}^1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbf{R}'^2 \\ & \text{application} & & \text{axonométrie} & \\ & \text{différentiable} & & & \\ & & t \rightarrow \vec{r}(t) \rightarrow \rho(t) & & \end{array}$$

Si $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0 \ \forall t$, on a une immersion de \mathbf{R}^1 dans \mathbf{R}^3

Les immersions suivantes sont classiques:

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

droite
 $\subset \mathbf{R}^3$

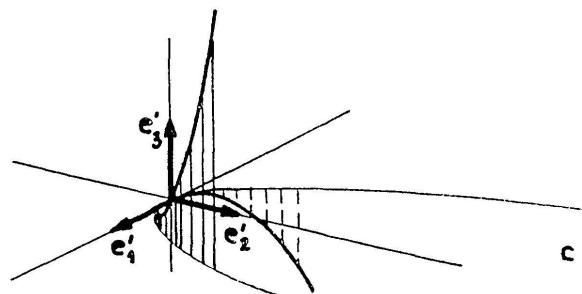
a

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

cercle

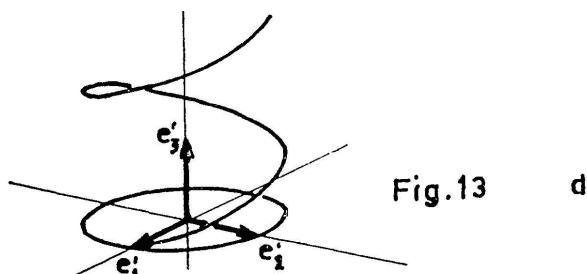
b

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$



c cubique

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \lambda t \end{pmatrix}$$



hélice

Fig.13 d

Pareillement:

$$\begin{array}{ccc} \omega & & \alpha \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{\text{différentiable}} & \mathbf{R}^3 \xrightarrow{\text{axonométrie}} \mathbf{R}'^2 \end{array}$$

$$(u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ \lambda v \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\rho}(u, v)$$

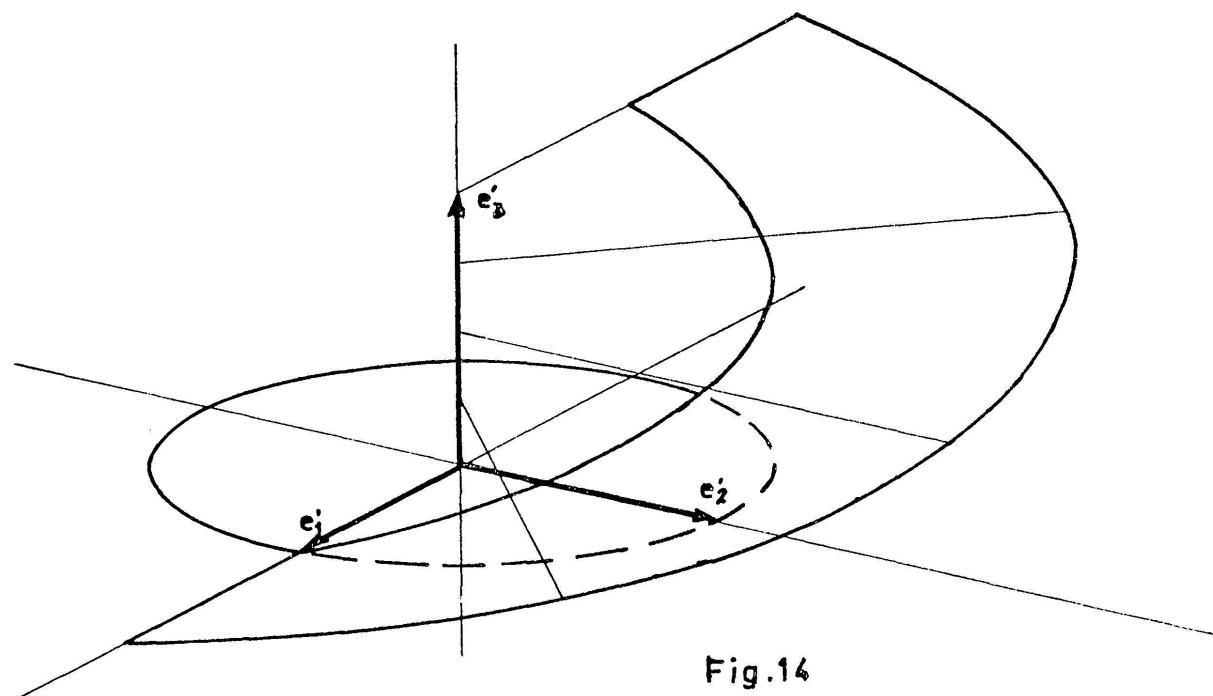


Fig.14

L'hélicoïde droit résulte d'une immersion injective de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^3 .

Encore

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}'^2$$
$$(u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ u v \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\rho}(u, v)$$

Ce paraboloïde hyperbolique résulte aussi d'une immersion injective.

8. La perspective et la théorie des espaces projectifs.

De même que l'axonométrie peut être considérée comme source de l'algèbre linéaire, *la perspective peut être regardée comme génératrice des notions projectives.*

Dans $\mathbf{R}^4 - \{0\}$, les droites issues de 0 forment une partition; par passage au quotient, on obtient l'espace projectif P^3 . $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ donne de même le plan projectif P^2 .

Toute application linéaire $\alpha: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}'^3$ induit alors une application projective de P^3 privé d'un point K — correspondant au noyau de α — sur P'^2 .

$$\alpha^*: P^3 - \{K\} \rightarrow P'^2$$

Toute la théorie de la perspective peut être refaite dans cette optique, ce qui donne des constructions pratiques, rapides et efficaces [4] [5].

9. Quel but vise-t-on?

Quel est le but de l'enseignement des mathématiques aux niveaux délimités (secondaire et premier cycle universitaire)? J'ai proposé [3] de regarder tout fait ou être de raison mathématique sous deux aspects:

1) *L'aspect algorithmique*: maniement discursif rectiligne du signe graphique — typographique — qui conduit à l'efficacité numérique ou logique:

règles algébriques opératoires, analyse, logique formelle, analyse numérique, recherche opérationnelle, ordinateurs...

2) *L'aspect ontologique*: saisie conceptuelle globale ou synthétique, et maniement direct des êtres de raison mathématiques spatialisés ou hyperspatialisés. La tendance se porterait ici plutôt vers l'esthétique, vers la philosophie...

Ces deux aspects sont toujours présents, et complémentaires, l'accent pouvant être mis sur l'un plutôt que sur l'autre. Supprimer l'un d'eux au profit de l'autre, c'est mutiler le savoir.

La géométrie descriptive telle qu'elle est précisée ici, consiste en la saisie, la création, la représentation des configurations de l'espace sous leur aspect ontologique, avec un minimum de moyens algorithmiques.

Oui, notre droite, notre plan et notre espace sont saturés de figures et de mouvements d'une extrême beauté: c'est cela que nos élèves doivent percevoir dans les heures de géométrie — sans oublier la précision algorithmique et logique —.

Dans l'enseignement de la géométrie descriptive, faisons émerger les belles configurations harmonieuses, celles qui sont régies par un groupe ou qui satisfont un quelconque besoin d'ordre et de beauté, et présentons-les avec respect, soin et précision. Demandons même à nos élèves d'en créer. Usons des possibilités techniques de projection de ce temps: rétroprojecteurs, anaglyphes, films.

Le monde des configurations peut être étudié selon diverses perspectives.

- 1) En vue de l'usage pratique par l'ingénieur, le technicien, l'industriel, l'architecte;
- 2) En vue de caractères esthétiques propres, sans usage nécessairement envisagé;
- 3) Au seul point de vue logique et mathématique, comme germe de théories plus vastes.

Ou encore: tout être mathématique

- a) peut être directement utile;
- b) peut avoir une beauté logique interne;
- c) peut être racine d'une théorie plus puissante.

Le maître ou professeur qui a conscience de ce dernier fait ne se croira pas nécessairement obligé d'enseigner la dite théorie !

10. *Les raisons de l'opposition faite parfois à la géométrie descriptive.*

La géométrie de Monge est le type de la science conçue surtout en vue de l'utilité technique, sans aucun souci d'esthétique, et sans préoccupation de portée théorique. C'est une technique froide, qui masque l'attrait éventuel de toute configuration, et dont le but est uniquement de donner les aspects les plus propres au découpage industriel: *c'est l'outil insurpassable du réalisateur : technicien ou contremaître.*

Il arrive parfois même que la simplicité technique absorbe l'aspect intuitif au point de compliquer la réalisation ! Le problème posé aux élèves se réduit souvent à un rébus dépourvu d'intérêt visuel, apte à éloigner

définitivement de la géométrie l'étudiant le mieux disposé. *La géométrie de Monge ne saurait constituer une initiation à l'espace.*

La perspective traditionnelle a bien pour but la présentation esthétique de figures de l'espace, mais on doit avouer que les techniques employées n'ont aucune portée théorique. On peut comprendre un peu la réaction qui s'est produite dans certains milieux, où l'on a brusquement constaté que la géométrie représentative (projections de Monge et perspective) s'était bel et bien fossilisée en un chaos de techniques.

Cet exposé aura prouvé, je l'espère, la vigueur et l'actualité de la géométrie représentative axée sur l'algèbre linéaire.

Comparons 15 a) et 15 b):

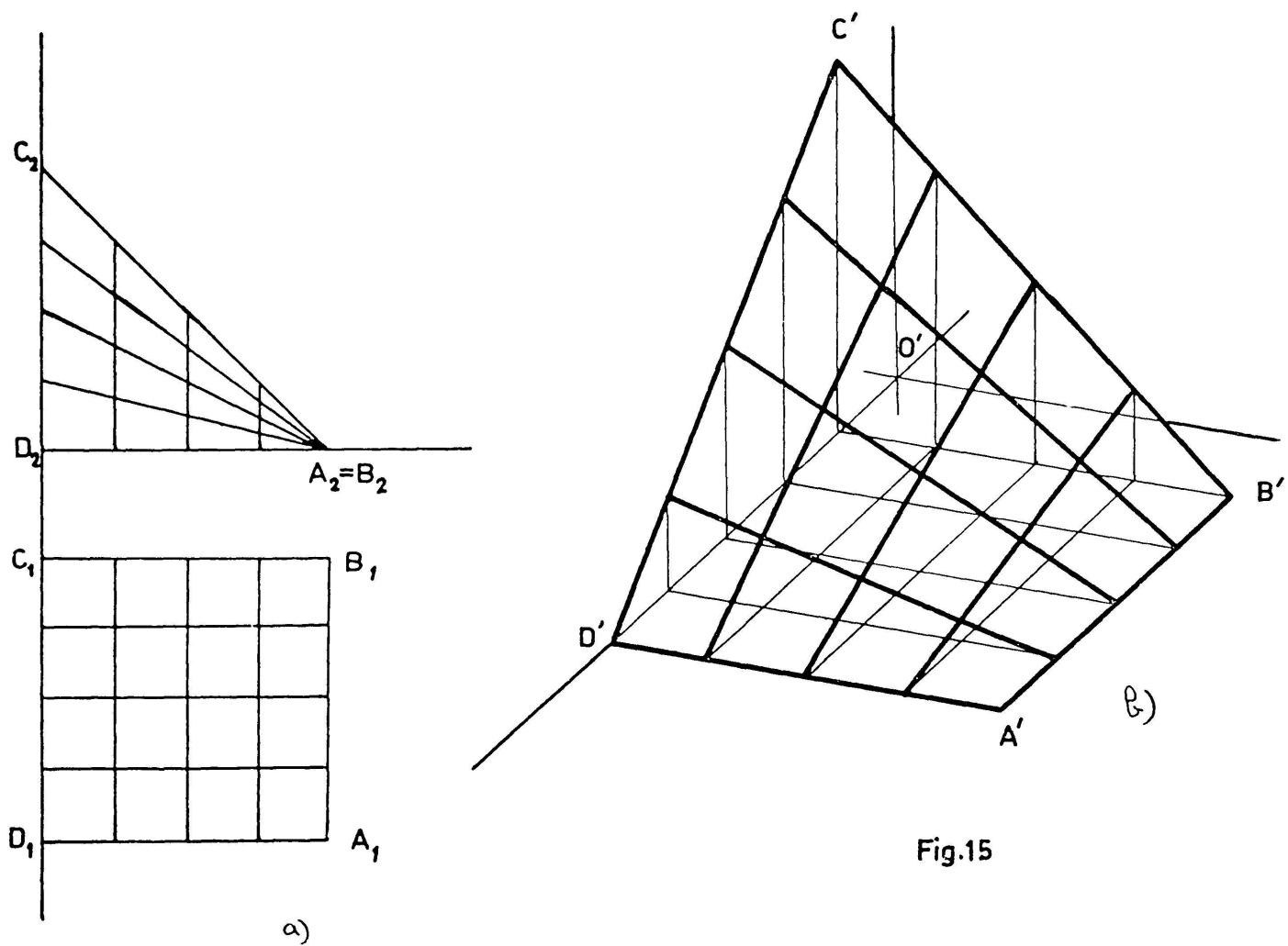


Fig.15

11. *Les grandes lignes d'un programme de géométrie de l'espace.*

I. Etude intuitive et logique de la droite, du plan, de l'espace, des vecteurs, des figures simples, avec les notions suivantes: incidence, parallélisme, perpendicularité, translation, rotation, symétries, homothétie.

Le raisonnement logique serait accompagné d'esquisses propres et précises, la main de l'élève devenant apte à exprimer le fait ontologique perçu. Ces esquisses seraient exécutées sans aucune théorie représentative autre que celle utilisée dans les croquis perspectifs.

II. Une deuxième étape consisterait à saisir l'espace à l'aide d'un repère orthonormal $Oe_1 e_2 e_3$ et à l'exprimer sur un plan par un système $O'e'_1 e'_2 e'_3$, avec $\sum x_i e_i \rightarrow \sum x_i e'_i$. La représentation correcte de polyèdres, de cercles, de cônes, de cylindres, de sphères devient possible. Quelques groupes de similitudes seraient présentés: certains groupes finis de déplacements par exemple. Ce serait une transition vers l'algèbre linéaire, avec la simple observation des axiomes des espaces vectoriels.

III. Dans une troisième étape apparaîtraient toutes les figures-types, et tous les groupes importants de similitudes, présentés dans le cadre de l'algèbre linéaire des applications $\alpha: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ $m, n \leq 3$, avec toutes les notions usuelles: produits scalaire, extérieur, vectoriel..., calcul matriciel, etc. Le caractère esthétique et l'utilité physique de divers réseaux plans ou spatiaux apparaîtraient. L'axonométrie perspective issue de l'algèbre linéaire aurait sa place.

Les parties I et II pourraient constituer un tronc commun pour la géométrie dans l'espace au niveau secondaire, au programme de la maturité pour tous les types. Pour le type C, le programme II, plus étayé, englobant la connaissance de la méthode de Monge serait l'objet d'un examen spécial. Quant à la partie III, ce serait le tronc commun universitaire propédeutique pour les étudiants ingénieurs, architectes, physiciens, mathématiciens, dans l'esprit du présent exposé.

12. *Conclusions.*

La géométrie représentative ne saurait être considérée comme une branche fossile, à rayer simplement des programmes. Sa première fonction propre est de présenter clairement le phénomène fondamental de l'algèbre linéaire: l'application linéaire à noyau non trivial. Sa deuxième fonction propre est de permettre la saisie ontologique précise du trésor des configurations de l'espace, tout en faisant apparaître une certaine régulation logique de l'esthétique. Enfin, sa troisième fonction propre est de permettre l'accès aux germes des théories les plus hautes.

Je ne connais pas de théorie mathématique qui ne soit en quelque manière enracinée dans N , \mathbb{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 ; il s'agissait ici de \mathbf{R}^3 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DIEUDONNÉ, Jean, *Rôle de l'algèbre linéaire dans les Mathématiques modernes.* Séminaire de la C.I.E.M. Echternach, 1965.
- [2] GAUSS, C. F., *Göttingische gelehrte Anzeigen.* Stück 121. Seite 1206 bis 1208. 1813 Juli 31.
- [3] SIEBENTHAL, Jean de, Essai de rénovation de la géométrie descriptive. *Mathématiques du XX^e siècle*, vol. 11. Bruxelles, 1961.
- [4] —— *Ontologie mathématique et algorithmes*: Séminaire de la C.I.E.M. Echternach, 1965.
- [5] —— *Géométrie descriptive*: Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne., 1960.
- [6] STIEFEL, E., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. Birkhäuser Basel 1947.

J. de Siebenthal
Chaire de Géométrie
Ecole Polytechnique
Lausanne