Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QU'EST-CE QU'UNE QUADRIQUE ?
Autor: Samuel, Pierre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41536

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

QU'EST-CE QU'UNE QUADRIQUE ?

Par Pierre SAMUEL (Paris)

Il est d'usage de définir une quadrique comme un *ensemble* de points d'un espace projectif, réel ou complexe. Mais, sauf dans le cas complexe, cet ensemble de points ne détermine pas *l'équation* de la quadrique (à un facteur près, bien entendu): par exemple cet ensemble peut être vide, ou ne comporter que des points singuliers (équations $x^2 + y^2 = 0$ et $x^2 + 3y^2 = 0$ dans l'espace projectif réel). Il est donc incorrect de parler alors de *l'*équation de la quadrique; même N. Bourbaki, dans les exercices de son chapitre IX d'Algèbre, a commis cette erreur.

Cependant, dès que l'ensemble des points d'une quadrique contient un point *simple*, cet ensemble de points détermine l'équation à un facteur près. Pour plus de commodité nous remonterons à un espace vectoriel; nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soient* K *un corps de caractéristique* $\neq 2$, E *un espace vectoriel sur* K, B *et* B′ *deux formes bilinéaires symétriques sur* E, Q *et* Q′ *les formes quadratiques associées* (i.e $Q(x) = B(x, x)$). *On suppose que les relations* $Q(x) = 0$ *et* $Q'(x) = 0$ *sont équivalentes, et qu'on dispose d'un point* x_0 *de* E *tel que* $Q(x_0) = 0$ *et qu'il existe* $y \in E$ *avec* $B(x_0, y) \neq 0$ *(autement dit* x_0 *n'est pas dans le noyau de* B*). Alors les formes* B *et* B′ *sont proportionnelles, de même que* Q *et* Q′.

En effet soit x un point quelconque de E, et soit $a \in K$. Comme $Q(x_0) = Q'(x_0) = 0$, les équations (en a) $Q(ax_0 + x) = 0$ et $Q'(ax_0 + x) = 0$ s'écrivent

$$2a\,B(x_0, x) + Q(x) = 0 \qquad et \qquad 2a\,B'(x_0, x) + Q'(x) = 0\,.$$

et sont équivalentes par hypothèse. En traduisant les propriétés « avoir une solution et une seule » pour les équations (1), on en déduit que les relations $B(x_0, x) \neq 0$ et $B'(x_0, x) \neq 0$ sont équivalentes, donc aussi les relations $B(x_0, x) = 0$ et $B'(x_0, x) = 0$. Ainsi les formes linéaires $x \mapsto B(x_0, x)$ et $x \mapsto B'(x_0, x)$ ont même noyau H; par hypothèse ce noyau H est un hyper-

plan. Il existe donc, par l'algèbre linéaire, un élément non-nul c de K tel que

$$B'(x_0, x) = cB(x_0, x). \tag{2}$$

D'autre part l'équivalence des équations (1) montre qu'on a $B(x_0, x)\, Q'(x) = B'(x_0, x)\, Q(x)$ pour tout $x \in E$. Il résulte alors de (2) que, *pour* $x \notin H$, on a

$$Q'(x) = cQ(x) \qquad (x \notin H). \tag{3}$$

Or la formule bien connue $2B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ montre que, pour x, y et $x + y \notin H$, on a

$$B'(x, y) = cB(x, y). \tag{4}$$

En changeant y en $-y$, on voit que cette relation est encore vraie pour x, y et $x - y \notin H$. Or, comme K n'est pas de caractéristique 2, si on a $x, y \notin H$, les éléments $x + y$ et $x - y$ ne peuvent être tous deux dans H; donc (4) est vraie pour $x, y \notin H$. Fixons alors $x \in H$, et considérons la forme linéaire $y \mapsto B'(x, y) - cB(x, y)$; on vient de voir qu'elle est nulle en dehors de H; elle est donc partout nulle car tout élément de l'hyperplan H est différence de deux éléments de son complémentaire. Ainsi (4) est vraie pour $x \notin H$ et y quelconque. En intervertissant les rôles de x et de y, le même raisonnement montre que (4) est vraie pour x et y quelconques. Or, c'est ce qu'on voulait démontrer.

Ecole normale supérieure de jeunes filles
Boulevard Jourdan, 48 (Paris, 14e)

(Reçu le 21 avril 1967)