Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 13 (1967)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VOLUME DU SOLIDE ENGENDRÉ PAR LA ROTATION D'UNE AIRE PLANE AUTOUR D'UN AXE QUELCONQUE

Autor: Loeffler, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41535

VOLUME DU SOLIDE ENGENDRÉ PAR LA ROTATION D'UNE AIRE PLANE AUTOUR D'UN AXE QUELCONQUE

par A. Loeffler

On sait que Guldin a démontré le théorème suivant: « Le solide engendré par une surface plane quelconque $\mathscr{F}$, dans une révolution entière autour d'un axe fixe a, situé dans son plan, a pour volume V le produit de la circonférence $2\pi\rho$ décrite par son centre de gravité G, multipliée par l'aire S de la surface génératrice. Ainsi l'on a: $V = 2\pi\rho S$. » J'ai trouvé qu'il est possible de généraliser cette proposition en supposant que le plan de la surface génératrice, au lieu de renfermer l'axe fixe, le coupe en un point, ou lui est parallèle.

Théorème. — Considérons, dans l'espace, un axe a, un plan $\mathscr{P}$ et, dans ce plan, une surface $\mathscr{F}$ limitée par une courbe fermée $\mathscr{C}$. Supposons que $\mathscr{F}$ soit entièrement située d'un même côté de la projection a' de a sur le plan $\mathscr{P}$. Si V est la mesure du volume engendré en faisant tourner $\mathscr{F}$ d'un tour complet autour de a, et si on désigne par φ l'angle de a avec le plan $\mathscr{P}$, on a:

$$V = V_0 \cos\varphi \,, \tag{1}$$

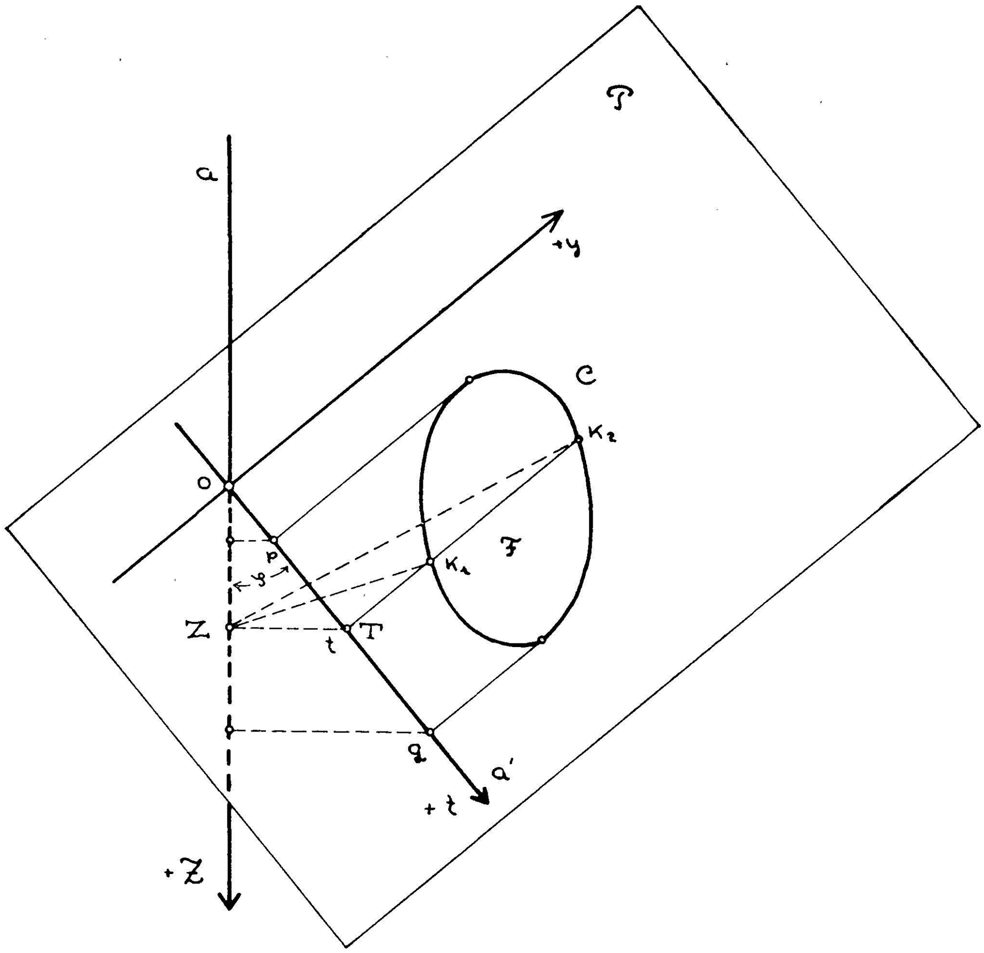
où V_o est le volume qu'engendrerait $\mathscr{F}$ en tournant de 360° autour de a'.

Démonstration. — Plaçons-nous dans le cas général, et supposons que le plan $\mathscr{P}$ coupe l'axe a en un point O. Menons, dans le plan $\mathscr{P}$, par le point O, la perpendiculaire à a'. Soit Oy cette droite. Orientons les axes Oy et a' de façon que $\mathscr{F}$ soit située dans leur premier quadrant. Nous dénommerons Ot l'axe $á$. Donc si T est un point de a', on a: $OT = t$. Supposons que la parallèle à Oy, menée par T, rencontre $\mathscr{C}$ en deux points K_1 et K_2, ce qui revient à admettre que C est formée de deux branches. Soient $y = f_1(t)$, et $y = f_2(t)$ leurs équations respectives, dans le système y, t. Orientons l'axe a, et si Z est la projection de T sur a, nous poserons: $\overline{OZ} = z$. Les volumes engendrés par la rotation de $\mathscr{F}$ autour de Ot et de Oz sont, respectivement:

$$V_0 = \text{Vol}\,(F, \vec{t}) = \pi \int_p^q \left[f_2^2(t) - f_1^2(t) \right] dt\,;$$

$$V = \text{Vol}\,(F, z) = \pi \int_{p\cos\varphi}^{q\cos\varphi} \left[\tilde{f}_2^2(z) - \tilde{f}_1^2(z) \right] dz\,,$$

où $z = t\cos\varphi$, où p et q sont les valeurs de t correspondant aux deux points qui sont les extrémités des deux branches de $\mathscr{C}$, et où



$$\tilde{f}_i^2(z) = f_i^2\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right) + \frac{z^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,.$$

Donc

$$V = \pi \int_{p\cos\varphi}^{q\cos\varphi} \left[f_2^2\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right) - f_1^2\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right) \right] dz =$$

$$= \left\{ \pi \int_p^q \left[f_2^2(t) - f_1^2(t) \right] dt \right\} \cos\varphi = V_0 \cos\varphi\,.$$

La formule (1) est aussi valable dans le cas où le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à l'axe a, et où, par suite, l'angle φ est égal à 0. On voit, en effet, qu'on peut utiliser dans ce cas une démonstration analogue à celle qu'on avait suivie pour $\varphi \neq 0$.

(Reçu le 22 décembre 1966.)

8, chemin Fontanettaz
1012 Lausanne-Pully.

vide-leer-empty