Helfenstein [4] a montré qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, si une certaine fonction qui le définit est six fois dérivable aux sommets. Comme d'autre part E. Wirsing [6] a démontré que le bord de l'ovale hypothétique est une courbe analytique (« regulär-analytisch »), sa non-existence serait donc démontrée. Mais Wirsing pense que la preuve d'Helfenstein, qui s'appuie sur une dérivabilité locale, doit contenir une erreur ([6], p. 304). A son avis, l'inexistence de l'ovale doublement isocorde ne peut résulter que d'une considération globale. Le problème est encore cité en 1966 par Stanley Ogilvy parmi les questions ouvertes [7].

Je me propose de ramener le problème géométrique à une question de suite récurrente, d'en déduire l'inexistence de l'ovale doublement isocorde pour une excentricité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, ainsi que pour une liste de valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$, et de montrer de cette manière que l'existence de cet ovale est très improbable, quelle que soit l'excentricité.

I

Pour montrer qu'il n'existe pas d'ovale à deux points isocordes, il suffirait d'établir qu'une suite récurrente x_n, que nous allons voir, n'est pas monotone.

Prenons comme unité la longueur commune des isocordes, et donnons nous la distance $OO' = a$. Le milieu I de OO' étant centre de symétrie de l'ovale Ω, les points A, A' de la droite OO' tels que $IA = IA' = \frac{1}{2}$ appartiennent à Ω. Nous les plaçons dans l'ordre A', O, O', A. L'ovale étant symétrique par rapport à la droite OO', un point B, situé sur sa perpendiculaire en O à la distance $\frac{1}{2}$, fait également partie de Ω. Rapportons le plan aux axes Ox, Oy, orientés respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Soit M_n un point de Ω d'affixe

$$z_n = r_n e^{i\theta n} = x_n + iy_n .$$

L'extrémité M_n' de la corde $M_n M_n' = 1$ menée par O a pour affixe $z_n - e^{i\theta n}$ et le symétrique de M_n' par rapport à I est un point M_{n+1} de Ω [1] d'affixe

$$z_{n+1} = a + e^{i\theta n} - z_n , \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{i}{2} .$$

si on prend B pour point M_0.

1) On démontre facilement que le point $M_n + 2$ coïncide avec l'extrémité P de la corde $M'_nP = 1$ passant par O'.

On en déduit sans peine deux systèmes de récurrence:

$$(I)\begin{cases} 1)\quad x_{n+1} = a + x_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & x_0 = 0\,, \\[2ex] 2)\quad y_{n+1} = y_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} - 1\right), & y_0 = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} 3)\quad tg\,\theta_{n+1} = \dfrac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + \dfrac{a}{1-r_n}}\,, & \theta_0 = \dfrac{\pi}{2}\,, \\[2ex] 4)\quad r_{n+1}^2 = a^2 + 2a(1-r_n)\cos\theta_n + (1-r_n)^2\,, & r_0 = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Comme $r_n < 1$ pour Ω, on voit par 3) que $\theta_{n+1} < \theta_n$ et par 2) que $y_n > 0$, quel que soit n.

Soit M_n'' le symétrique de M_n par rapport à Ox.

On sait que *Ω n'existe pas si pour un n, $r_{n+1} < r_n$*, car on a vu que $0M$ croît quand M parcourt le bord de A' vers A. *Il en est de même si pour un n, $x_{n+1} < x_n$*, car l'angle $M_n M_{n+1} M_n''$, inscrit dans l'ovale, serait alors rentrant.

Remarque. La suite x_n a un comportement intéressant. Les suites x_{2k} et x_{2k+1} sont toutes les deux croissantes, car $x_n < x_{n+2}$, puisque 1) permet d'écrire

$$x_n + x_{n+1} = a + \cos\theta_n < a + \cos\theta_{n+1} = x_{n+1} + x_{n+2}\,.$$

Or le calcul électronique montre (du moins pour tous les a traités) qu'à un certain rang n', $x_{n'} > \dfrac{a+1}{2}$. Donc $x_n > \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices de même parité que n' et supérieurs à lui, et $x_n < \dfrac{a+1}{2}$ pour tous les indices supérieurs à n' et de parité contraire. Les premiers convergent donc vers une valeur $x' > \dfrac{a+1}{2}$ et les seconds vers une valeur $x'' < \dfrac{a+1}{2}$, avec $x' + x'' = a + 1$. Mais le calcul électronique montre que x' et x'' sont très voisins de $\frac{a+1}{2}$ lorsque a est petit. Ainsi, pour $a = 0{,}03$,

$$\frac{1+a}{2} - x_{463} \simeq 14 \cdot 10^{-25} .$$

II

Il n'existe pas d'ovale doublement isocorde d'excentricité supérieure ou égale à ½.

Nous distinguerons deux cas:

1) $a \geqq 0{,}6$. Il suffira de montrer que $r_2^2 < r_1^2$. Puisque

$$r_1^2 = a^2 + 1/4 , \qquad \text{et} \qquad r_2^2 = 5/4 - 1/2r_1 ,$$

cette inégalité se réduit à

$$4a^4 - 7a^2 + 2 < 0 , \qquad \text{soit} \qquad (7 - \sqrt{17})/8 < a^2 < (7 + \sqrt{17})/8 .$$

Comme $0 < a < 1$, il faut donc $a > \left[(7 - \sqrt{17})/8\right]^{-\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{0{,}3598}$, valeur légèrement inférieure à 0,6.

2) $0{,}5 \leqq a \leqq 0{,}6$. Il suffit de montrer que pour ces valeurs

$$x_3 > \frac{a+1}{2}$$

Or,

$$x_2 = 2a\,(1 + 4a^2)^{-1/2} , \qquad x_3 = a + x_2\big((1/r_2) - 1\big) ,$$

et l'inégalité à démontrer prend donc la forme

$$f(a) = \big(5/4 - (4a^2 + 1)^{-1/2}\big)^{-1/2} - 1 - \frac{1-a}{4a}(4a^2 + 1)^{1/2} > 0 .$$

La fonction $f(a)$ est la différence de

$$u(a) = \big(5/4 - (4a^2 + 1)^{-1/2}\big)^{-1/2} - 1 , \qquad v(a) = \frac{1-a}{4a}(4a^2 + 1)^{1/2} ,$$

qui sont décroissantes pour $a > 0$. Dans un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, de bornes positives, $f(a)$ est donc minorée par $F(\alpha, \beta) = u(\beta) - v(\alpha)$.

Nous avons alors partagé l'intervalle [0,5; 0,6] en 25 intervalles égaux et déterminé pour chacun $F(\alpha, \beta)$ à l'aide d'un calculateur électronique. Toutes les valeurs obtenues étant positives, $f(a) > 0$ dans [0,5; 0,6].