

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM
Autor: Daróczy, Z.
Kapitel: §. 1
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41530>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM

Von Z. DARÓCZY

§. 1

Es sei H ein reeller Hilbert-Raum mit Skalarprodukt (x, y) ($x, y \in H$). Mit $[H \rightarrow H]$ bezeichnen wir den Ring der linearen Operatoren von H . Ein Operator $A \in [H \rightarrow H]$ wird regulär genannt, wenn die lineare Inverse $A^{-1} \in [H \rightarrow H]$ existiert. In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit der Funktionalgleichung

$$\varphi[A(x) + B(y) + c] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \quad (x, y \in H) \quad (1)$$

beschäftigen, wobei φ eine eindeutige Abbildung des Raums H in die Menge der reellen Zahlen R ist. Dabei sind A und B reguläre Operatoren aus $[H \rightarrow H]$ und c ist ein Element aus H . Über die Konstanten α, β, γ setzen wir voraus, dass $\alpha\beta \neq 0$ gilt.

Ziel dieser Arbeit ist es, für die Funktionalgleichung (1) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz nichtkonstanter stetiger Lösungen zu bestimmen.

Im eindimensionalen Fall geht (1) in die bekannte Funktionalgleichung

$$\varphi(ax + by + c) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \quad (\varphi: R \rightarrow R; x, y \in R) \quad (2)$$

über, wobei keine der Konstanten a, b, α und β gleich Null ist. Für die Funktionalgleichung (2) hat J. ACZÉL in [1] den folgenden Satz bewiesen: *Eine stetige nichtkonstante Lösung der Gleichung (2) existiert dann und nur dann, falls $a = \alpha, b = \beta$ ist. Dabei muss $\gamma = 0$ sein, falls $\alpha + \beta = 1$ und $c = 0$ ist* (Siehe auch [2]). Wenn φ keine stetige Funktion ist, dann gilt diese Behauptung nicht mehr, wie es die Untersuchungen der Arbeit [3] (Siehe auch [4], [5]) zeigen.

In § 2 beweisen wir zwei Lemmata über die Lösungen von (1). In § 3 untersuchen wir die stetigen nichtkonstanten Lösungen der Funktionalgleichung (1) und wir beweisen eine Verallgemeinerung des Satzes von J. ACZÉL.