

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: AU SUJET DES CONGRUENCES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR A DEUX
Autor: Thouvenot, S. / Chatelet, F.
Kapitel: II. Sommes des puissances des racines d'une équation algébrique
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-41529>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'une ou l'autre des deux congruences :

$$w^3 + 7t^2 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad w^3 + 8t^2 \equiv 0, \quad (17)$$

entraîne que :

$$K_{16}(w, t) = w^8 + 21w^5t^2 + 15w^2t^4 \equiv 1, \quad (17)$$

Pour l'entier premier $N = 31$, le quotient :

$$K_{28}(w, t)/w = w^{12} + 3.26w^9t^2 + 5.99w^6t^4 + 7.66w^3t^6 + 9.5t^8$$

se décompose, dans le corps des restes d'entiers suivant le module 31 en le produit :

$$(w^3 + 12t^2)(w^3 + 16t^2)(w^3 + 18t^2)(w^3 + 25t^2).$$

II. SOMMES DES PUISSANCES DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRE

Pour généraliser facilement les résultats précédents, il est commode d'utiliser les sommes S_j des puissances des racines d'une équation algébrique :

$$X^{n+1} - v_1X^n - v_2X^{n-1} - \dots - v_{n+1} = 0, \quad (16)$$

pour les exposants entiers j , tant positifs que négatifs ou nuls, et les combinaisons linéaires de ces sommes S_j .

Si on considère la puissance θ^j d'une racine θ de l'équation (16), d'exposant j entier positif, négatif ou nul, comme une fonction $f(j)$ de l'exposant j , cette fonction vérifie la relation de récurrence :

$$f(j) = \sum (v_i f(j-i)), \quad (17)$$

où la somme est étendue aux valeurs entières de i de 1 à $n + 1$. Toute combinaison linéaire de plusieurs solutions de la relation de récurrence (17) vérifie aussi cette relation; en particulier, les sommes S_j des puissances d'exposant j des racines de l'équation (16) vérifie la relation :

$$S_j = \sum (v_i S_{j-i}).$$

De façon plus précise, on peut déterminer de manière unique une solution de la relation (17) qui prend des valeurs données pour n valeurs de la variable j ; elle peut être exprimée comme combinaison linéaire de n solutions particulières de la relation (17), pourvu que ces solutions soient linéairement indépendantes.

En particulier, on peut déterminer une combinaison linéaire:

$$K_j(v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) = a_1 \theta_1^j + a_2 \theta_2^j + \dots + a_{n+1} \theta_{n+1}^j$$

des puissances d'exposant j des racines de l'équation (16) telle que:

$$K_0 = 1, \quad K_{-1} = 0, \quad K_{-2} = 0, \quad \dots, \quad K_{-n} = 0. \quad (18)$$

La fonction K_j est déterminée de manière unique, pourvu que l'équation (16) n'ait pas de racine multiple. Inversement, les fonctions $f(j) = \theta^j$, pour chaque racine θ de l'équation (16), peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires de $n + 1$ fonctions K_{i+j} , par exemple pour les valeurs $0, 1, \dots, n$ de l'indice i .

Les fonctions $K_j(v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ peuvent être calculées, à partir des valeurs initiales (18), au moyen de la formule de récurrence (17). Elles peuvent aussi, pour les valeurs positives des indices j , être exprimées en fonction de v_1, v_2, \dots, v_{n+1} par la formule:

$$K_j(v_1, v_2, \dots, v_{n+1}) = \Sigma \left(\frac{(j_1 + j_2 + \dots + j_{n+1})!}{j_1! j_2! \dots j_{n+1}!} v_1^{j_1} v_2^{j_2} \dots v_{n+1}^{j_{n+1}} \right) \quad (19)$$

où la somme est étendue à toutes les décompositions de l'entier j en sommes de la forme:

$$j = j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots + (n+1)j_{n+1} \quad (20)$$

avec j_1, j_2, \dots, j_{n+1} entiers positifs ou nuls.

Les sommes S_j , ou plus généralement les fonctions S_{i+j} de l'indice j , pour i fixe, peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires des fonctions K_j par la formule:

$$S_{i+j} = u_0 K_j + u_1 K_{j-1} + \dots + u_n K_{j-n}$$

où les coefficients u_0, u_1, \dots, u_n sont déterminés par les relations:

$$\begin{aligned} S_i &= u_0, & S_{i+1} &= u_0 K_1 + u_1, & S_{i+2} &= u_0 K_2 + u_1 K_1 + u_2, \\ &\dots, & S_{i+n} &= u_0 K_n + u_1 K_{n-1} + \dots + u_n. \end{aligned}$$

Elles peuvent aussi être calculées, pour les entiers positifs j , en fonction de v_1, v_2, \dots, v_{n+1} par la formule:

$$S_j = j \Sigma \left(\frac{(j_1 + j_2 + \dots + j_{n+1} - 1)!}{j_1! j_2! \dots j_{n+1}!} v_1^{j_1} v_2^{j_2} \dots v_{n+1}^{j_{n+1}} \right) \quad (21)$$

où la somme est étendue aux décompositions de l'entier j de la forme (20)¹⁾.

Exemples : Pour $n = 4$, les fonctions K_4 , K_5 et K_6 sont :

$$K_4 = v_1^4 + 3v_1^2 v_2 + 2v_1 v_3 + v_2^2 + v_4$$

$$K_5 = v_1^5 + 4v_1^3 v_2 + 3v_1^2 v_3 + 3v_1 v_2^2 + 2v_1 v_4 + 2v_1 v_4 + 2v_2 v_3$$

$$K_6 = v_1^6 + 5v_1^4 v_2 + 4v_1^3 v_3 + 6v_1^2 v_2^2 + 3v_1^2 v_4 + 6v_1 v_2 v_3 + v_2^3 + 2v_2 v_4 + v_3^2.$$

Pour $n = 5$, la fonction K_{12} (avec $v_1 = 0$) est :

$$K_{12} = v_4^3 + 12v_2 v_3^2 v_4 + 6v_2^2 v_4^2 + 5v_2^4 v_4 + v_3^4 + v_2^6 + 10v_2^3 v_3^2 + 3v_5^2 v_2 + 6v_5 v_3 v_4 + 12v_5 v_3 v_2^2.$$

III. CONGRUENCES DE DEGRÉ ARBITRAIRE

On cherche les conditions que doivent vérifier les entiers v_1, v_2, \dots, v_{n+1} pour que la congruence :

$$X^{n+1} - v_1 X^n - v_2 X^{n-1} - \dots - v_{n+1} \equiv 0, \quad (N), \quad (22)$$

où N est un entier premier, ait $n + 1$ solutions entières et distinctes.

Le théorème de FERMAT montre que, si les racines θ de cette congruence sont entières, elles vérifient la congruence :

$$\theta^{N-1} \equiv \theta, \quad (N). \quad (23)$$

Les fonctions K_j vérifient alors, pour toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles de j , les congruences :

$$K_{j+N-1} \equiv K_j, \quad (N). \quad (24)$$

Inversement, si $n + 1$ fonctions K_{i+j} vérifient la congruence (24), les racines θ de la congruence (22), vérifient toutes la congruence de FERMAT (23) et par suite sont entières. Les fonctions K_j ont d'ailleurs été choisies de manière que les conditions les plus simples correspondent aux valeurs entières de i de $-n$ à 0 .

Ainsi, les congruences :

$$K_{N-n} \equiv 0, \quad K_{N-n-1} \equiv 0, \quad \dots, \quad K_{N-2} \equiv 0, \quad K_{N-1}, \quad (N), \quad (25)$$

¹⁾ *Loc. cit.*, p. 135, où la formule est établie seulement pour $v_1 = 0$, mais peut être généralisée facilement. Voir aussi GLENNISON et DERDVIDUE, *Mathesis* (1960).