Nous allons voir que la propriété pour un anneau $A$ d'être un anneau de Jacobson se transfère à l'anneau des polynômes $A$ [X]. On connaît d'autres propriétés simples de transfert de $A$ à $A$ [X], par exemple le caractère « intègre », ou « factoriel ». Par contre, le caractère « principal » ne passe pas: $k$ [X] est principal, mais $k$ [X, $Y$] ne l'est pas. Nous allons démontrer cette propriété de transfert pour les anneaux de Jacobson.

## 4. Théorème de transfert

*Si* A *est un anneau de Jacobson, il en est de même de l'anneau* A [X] *des polynômes à coefficients dans* A.

Il faut donc démontrer que, si $\mathscr{P}$ est un idéal *premier* de $A$ $[X]$, $\mathscr{P}$ est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent, ou encore:

Théorème 5. *Si $\mathscr{P}$ est un idéal premier propre et si* F $\notin \mathscr{P}$, *il existe un idéal maximal* M *tel que :* $\mathscr{P} \subseteq$ M, F $\notin$ M.

Pour étudier les idéaux premiers $\mathscr{P}$ de $A$ $[X]$, nous considérons les idéaux suivants:

$\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap A$: *idéal projection* (ou restriction); c'est un idéal premier propre de $A$;

$\Pi = A\,[X]\,\mathfrak{p}$: *idéal projetant* (ou extension de $\mathfrak{p}$) engendré par l'idéal $\mathfrak{p}$ dans $A$ $[X]$. C'est un idéal premier dans $A$ $(X)$ formé par les polynômes dont les coefficients sont des éléments de $\mathfrak{p}$.

On a les inclusions suivantes:

$$\mathfrak{p} \subset \Pi \subseteq \mathscr{P}\,.$$

*Premier cas :* $\mathscr{P} = \Pi$.

L'idéal $\mathscr{P}$ est alors formé des polynômes:

$$a_0 X^n + \ldots + a_n\,, \quad a_i \in \mathfrak{p}\,.$$

Nous allons voir que le théorème 5 est vrai dans ce cas, sans autre hypothèse sur $A$.

Soit:

$$F(X) = b_0 X^m + \ldots + b_m \notin \Pi\,.$$

On a donc au moins un coefficient $b_j$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$ et on peut supposer que c'est le premier $b_0$.

Considérons l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$, qui est intègre puisque $\mathfrak{p}$ est premier, et l'homomorphisme canonique $\varphi: A \to A/\mathfrak{p}$. Appelons $\varphi(a) = \bar{a}$ la classe de $a$ modulo $\mathfrak{p}$. L'homomorphisme $\varphi$ peut être étendu à un homomorphisme $\Phi$ de l'anneau des polynômes $A[X]$ sur l'anneau des polynômes $A/\mathfrak{p}[X]$. Le noyau de $\Phi$ est précisément l'idéal $\Pi$. L'image $\bar{F}$ de $F$ est un polynôme non nul de $A/\mathfrak{p}[X]$. On peut donc lui appliquer le théorème 2', et il existe un polynôme maximal $\bar{M}$ de $A/\mathfrak{p}[X]$ qui ne contient pas $\bar{F}$. Son image inverse $M$ par $\Phi$ est un polynôme maximal de $A[X]$ qui contient $\Pi$ et qui ne contient pas $F$.

*Deuxième cas :* $\Pi \subset \mathscr{P}$.

Soit $k$ le corps des fractions de l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$ et $i$ l'injection canonique de l'anneau $A/\mathfrak{p}$ dans le corps $k$. On peut étendre cette injection à une injection $I$ de $A/\mathfrak{p}[X]$ dans $k[X]$. On aura donc, avec l'homorphisme $\Phi$ déjà considéré, le diagramme suivant:

$$A[X] \xrightarrow{\Phi} A/\mathfrak{p}[X] \xrightarrow{I} k[X].$$

L'idéal premier $\mathscr{P}$ de $A[X]$ est alors envoyé par $\Phi$ sur un idéal premier non nul de $A/\mathfrak{p}[X]$, qui engendre dans $k[X]$ un idéal premier non nul, donc engendré par un polynôme irréductible sur $k$ que l'on peut prendre sous la forme:

$$\bar{\Psi} = \bar{a}_0 X^d + \ldots + \bar{a}_d, \quad a_0 \notin \mathfrak{p}, \quad d > 0.$$

Tout polynôme $P \in \mathscr{P}$ donne dans $A/\mathfrak{p}[X]$ un polynôme $\bar{P}$ dont la division dans $k[X]$ par $\bar{\Psi}$ conduit à la relation:

$$\bar{a}_0^\rho \bar{P} = \bar{B}\bar{\Psi} \quad (\bar{B} \in A/\mathfrak{p}[X],\ \rho \text{ entier}).$$

Cette relation entraîne dans $A[X]$:

$$(1) \qquad a_0^\rho P = B\Psi \ (mod\, \Pi), \quad a_0 \notin \mathfrak{p}.$$

Réciproquement, tout polynôme $P$ vérifiant cette relation appartient à $\mathscr{P}$ puisque le second membre est contenu dans $\mathscr{P}$, que $\mathscr{P}$ est premier, et que $a_0 \notin \mathscr{P}$. Les polynômes de l'idéal premier $\mathscr{P}$ sont donc caractérisés par la relation (1).

Considérons maintenant le polynôme $F \notin \mathscr{P}$. On aura donc $\bar{F} \notin \bar{\mathscr{P}}$ et, dans $k[X]$, les polynômes $\bar{\Psi}$ et $\bar{F}$ seront premiers entre eux. Ils vérifient donc l'égalité de Bezout dans $k[X]$, qui donne dans $A/\mathfrak{p}[X]$ en chassant le dénominateur:

$$\bar{U}\bar{F} + \bar{V}\bar{\Psi} = \bar{u}, \qquad u \in A, \qquad u \notin \mathfrak{p}$$

d'où, dans $A[X]$:

$$(2) \qquad UF + V\Psi = u \ (mod\ \Pi), \qquad u \notin \mathfrak{p}$$

Prenons alors, avec l'hypothèse faite sur l'anneau $A$, un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ contenant $\mathfrak{p}$ et ne contenant pas $ua_0 \notin \mathfrak{p}$.

On vérifie aisément que l'idéal $I$ engendré par $\mathfrak{m}$ et $\Psi$ dans $A[X]$ a pour projection $\mathfrak{m}$ dans $A$. En effet: $\Psi = a_0 X^d + \ldots + a^d$ est tel que $a_0 \notin \mathfrak{m}$ puisque $ua_0 \notin \mathfrak{m}$. Soit alors une égalité de la forme:

$$v = L\Psi \ (mod\ A[X]\mathfrak{m}), \qquad v \in A.$$

En prenant les coefficients modulo $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire en opérant dans le corps $A/\mathfrak{m}$ et l'anneau $A/\mathfrak{m}[X]$, on remarque que le deuxième membre, s'il n'est pas nul, a un degré positif, tandis que le premier aurait un degré nul. On a donc $v = 0$ (mod $\mathfrak{m}$), ou $v \in \mathfrak{m}$.

Considérons un idéal maximal $M$ contenant $I$. Sa projection $M \cap A$ contient l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et elle est donc égale $\mathfrak{m}$. Il en résulte que $ua_0 \notin M$. Par suite, $M$ contient l'idéal premier $\mathcal{P}$ d'après (1) et ne peut contenir le polynôme $F$ d'après (2).

Le théorème est établi. Le résultat est dû à W. Krull [6]. La démonstration donnée ici est inspirée de [7].

A propos de cette démonstration, on peut se poser le problème suivant:

*Problème:* La projection d'un idéal maximal $M$ de $A[X]$ est-elle un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ ?

La réponse n'est pas évidente pour un anneau de Jacobson quelconque.

On peut démontrer au moyen de la théorie de la dimension qu'elle est affirmative dans le cas d'un anneau de polynômes $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ à $n$ indéterminées sur un corps $k$. Cet anneau est un anneau de Jacobson particulier: en effet, $k[X_1]$ étant un anneau de Jacobson, ainsi qu'on l'a remarqué au début du paragraphe 3, le théorème de transfert peut s'appliquer. On peut donc énoncer le résultat suivant:

Théorème 6. k *étant un corps commutatif quelconque, l'anneau de polynômes* $k[X_1, \ldots, X_n]$ *est un anneau de Jacobson.*

## 5. Le théorème des zéros de Hilbert

Considérons un idéal premier propre $\mathcal{P}$ de l'anneau de polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$, $k$ étant un corps quelconque. Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de $k$; nous prendrons les zéros des polynômes $f \in k[X, \ldots, X_n]$ dans l'espace